

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE
BRETAGNE OCCIDENTALE**

Spécialité :
Océanographie Physique

Présentée par :
Florian Sévellec

**Variabilité basse fréquence endogène et
exogène de la circulation thermohaline**

soutenue le : 13 juin 2007

devant le jury composé de :

Bach Lien Hua	Présidente du jury
Michael Ghil	Rapporteur
Andrew M. Moore	Rapporteur
Alain Colin de Verdière	Directeur de thèse
Thierry Huck	Co-directeur de thèse
Mahdi Ben Jelloul	Co-directeur de thèse
Jérôme Sirven	Examineur

Thèse préparée au Laboratoire de Physique des Océans, UBO, Brest, FRANCE

Remerciements

Je tiens à remercier très sincèrement Thierry Huck et Mahdi Ben Jelloul pour leur encadrement et leur soutien durant toute cette thèse. Leur approche scientifique différente et leur avis (parfois) divergeant m'ont permis de construire, je l'espère, ma propre vision de la recherche. J'ai beaucoup apprécié leur disponibilité et leur enthousiasme au sein du laboratoire comme dans la vie « réelle ». Je remercie aussi Alain Colin de Verdière d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse ainsi que pour les discussions scientifiques toujours enrichissantes et encourageantes.

Je tiens aussi à remercier Michael Ghil et Andy Moore pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, ainsi que Bach Lien Hua pour avoir présidé le jury et Jérôme Sirven pour avoir été examinateur. Je remercie également Bruno Blanke, Richard Schopp et Eric Simonet pour m'avoir suivi au travers de mon comité de thèse. Je remercie aussi Jérôme Vialard pour m'avoir suivi tout au long de cette thèse et m'avoir accueilli et permis de finir ma thèse dans les meilleures conditions au LOCEAN.

Je remercie tous les membres du Laboratoire de Physique des Océans pour leur accueil amical dont je me souviendrai. Je remercie aussi toute l'équipe d'Ovide 2004 qui m'a permis de découvrir une autre facette de l'océanographie dans une ambiance plus qu'agréable.

Je n'oublierai pas non plus de remercier mes camarades de pénitence du LPO : Raf (rock'n'roll office for life), Rudy, Yann & Lianke, Emilie, Gildas, Marc, Andrea, Sebastian, Nico et Xavier ; ainsi que du LOCEAN : Matthieu qui m'a accueilli à son bureau, Anne-Sophie et Cyril. Je pense aussi à Louis, Guillaume, Steven et Nico qui ont animé la vie du laboratoire durant ces années de thèse.

Je salue sincèrement tous les vieux copains de Brest et assimilés (dans le bazar le plus complet) : Erwan, Julio, Chouchou, Djidji, Yvan, Régis, Nico, Fanch & Julie, Alex, Antoine, Michou - désolé -, Romain (leur alter ego comme leurs quelconques descendance plus ou moins génétiques étant de toutes évidences à associer à la liste) ; les copains des O'Fauvettes : Nolwenn et Yann ; les finaux du BUC et ma rotule - Booze, Brooze & Broken-Boned. Je remercie plus particulièrement Fred sans qui cette thèse aurait eu beaucoup plus de fautes à revendre...

Enfin je remercierai tout particulièrement Nolwenn, mes parents, mes grand-parents, les deux frangins, l'autre qui est trop souvent là, ma famille et toute la famille Le Bris pour m'avoir supporté (dans tous les sens du terme) et encouragé pendant cette thèse et plus généralement dans la vie.

Table des matières

Table des matières	5
Résumé	7
Abstract	9
Introduction	11
I Variabilité océanique endogène	29
1 Oscillation centenaire	33
2 Oscillation millénaire	73
2.1 Introduction	73
2.2 États d'équilibres et oscillation millénaire	74
2.2.1 États d'équilibres	74
2.2.2 Oscillation millénaire, description	74
2.3 Caractérisations des bifurcations	80
2.3.1 Bifurcation thermique	84
2.3.2 Bifurcation haline	87
2.3.3 Influence du coefficient de friction linéaire	87
2.4 Conclusion	89
II Variabilité océanique exogène	93
3 Perturbations optimales de la salinité de surface influençant la circulation thermohaline (PG2D)	99
4 Perturbation optimale de la salinité de surface et variabilité multi-décennale (PG3D)	137
4.1 Introduction	137

4.2	Modèle, état d'équilibre et analyse de stabilité linéaire	138
4.2.1	Modèle planétaire-géostrophique	138
4.2.2	État d'équilibre	140
4.2.3	Analyse de stabilité linéaire	140
4.3	Perturbation initiale optimale de la salinité de surface	143
4.4	Perturbation stochastique optimale du flux d'eau douce	149
4.5	Conclusion	152
5	Impact de la salinité de surface sur la circulation océanique en configuration réaliste globale (OPA - ORCA2)	155
5.1	Introduction	155
5.2	Modèles et état d'équilibre	156
5.3	Perturbation initiale optimale de la salinité de surface	160
5.3.1	Intensité de la circulation méridienne	162
5.3.2	Intensité du transport de chaleur méridien	168
5.4	Conclusion	173
	Conclusion	175
	Bibliographie	193

Résumé

Une des conséquences du réchauffement climatique est la modification du cycle hydrologique et par conséquent du flux d'eau douce reçu par l'océan. Or ces flux ont une influence locale sur la salinité de surface de l'océan et donc sur sa circulation. La circulation océanique, et plus précisément la circulation thermohaline, est particulièrement susceptible de produire de la variabilité basse fréquence, en tant que composante lente du climat. Nous allons nous intéresser à l'impact du flux d'eau douce sur la circulation thermohaline et principalement sur sa variabilité décennale à millénaire.

Dans l'océan, comme dans tout système dynamique, deux paradigmes coexistent pour expliquer la variabilité observée : elle peut être endogène ou exogène.

Dans le premier paradigme, la variabilité provient de mode interne comme une oscillation de relaxation ou une saturation non-linéaire d'un mode linéaire croissant : cette théorie est intrinsèquement liée à des effets non-linéaires.

Le second paradigme se base sur l'existence d'un état d'équilibre asymptotiquement stable et de la nécessité d'une stimulation externe pour soutenir la variabilité : croissance transitoire de perturbations initiales ou oscillation soutenue par un forçage stochastique. En effet, la non-normalité de la dynamique océanique permet une forte variabilité autour d'un état d'équilibre même si celui-ci est stable.

Au cours de cette thèse nous avons cherché à identifier la variabilité apparaissant suivant différents régimes de forçages du flux d'eau douce. Pour cela nous implémentons des méthodes systématiques d'analyse comme des études de stabilité linéaire ou des études de stabilité généralisée dans une hiérarchie de modèles de plus en plus réalistes (allant de la boucle d'Howard-Malkus à un modèle aux équations primitives, OPA en configuration globale réaliste, en passant par des modèles 2D latitude-profondeur ou planétaire-géostrophique). Ces méthodes permettent d'extraire les mécanismes physiques liés à des modes de variabilité interne ou à des modes de variabilité forcée.

Plusieurs résultats notables apparaissent. Au cours de l'étude de la variabilité endogène dans un modèle 2D latitude-profondeur, les mécanismes de croissance et d'oscillation d'un mode centenaire sont analysés et ses caractéristiques décrites. Ce mode, correspondant à l'advection d'une anomalie de densité dominée par la salinité le long de la circulation, se

nourrit par la rétroaction de la salinité sur l'advection dans les zones de forçage par le flux d'eau douce.

De plus, un cycle d'oscillation millénaire apparaissant à travers une bifurcation période-infinie est caractérisé. La bifurcation est due à la présence de modes de plus hautes fréquences au cours du cycle millénaire. Ainsi, nous montrons que l'oscillation centenaire est un précurseur de l'oscillation millénaire.

Au cours de l'étude de la variabilité exogène, les perturbations optimales de la circulation océanique par la salinité de surface sont obtenues dans un modèle latitude-profondeur de la circulation thermohaline. Nous analysons un mode optimal de croissance en temps fini : une croissance de l'intensité de la circulation océanique, 67 yr après une perturbation de salinité de surface, est non seulement possible mais optimale. Cette perturbation optimale correspond à une stimulation de l'oscillation centenaire au moment où celle-ci se renforce dans la zone d'évaporation-précipitation par la rétroaction positive de la salinité sur l'advection. L'obtention de la perturbation optimale du flux d'eau douce confirme l'idée que l'augmentation de l'intensité de ce flux diminue la circulation océanique dans ce type de modèle. La perturbation stochastique optimale du flux d'eau douce, quant à elle, montre la forte réponse du mode linéaire le moins amorti, c'est-à-dire ici l'oscillation centenaire. Le reste du spectre de réponse océanique à la perturbation stochastique optimale correspond, comme attendu, à un bruit rouge.

De la même façon, une croissance après 24 yr est optimale au travers de l'oscillation multi-décennale apparaissant dans un modèle planétaire-géostrophique. Des études de perturbations stochastiques optimales montrent la forte réponse aux fréquences des modes linéaires avec une intensité contrôlée par la non-normalité du système. La variabilité étant fortement contrôlée par les conditions limites de surface (*i.e.* conditions mixtes ou conditions en flux), la forme des perturbations optimales et leur réponse le sont aussi.

Enfin, en utilisant un modèle aux équations primitives en configuration globale réaliste, une croissance optimale de l'intensité de la circulation méridienne océanique et du transport de chaleur méridien apparaissent respectivement 10.5 yr et 2.2 yr après la perturbation de salinité de surface. Ces perturbations initiales optimales nous permettent de caractériser un mécanisme de croissance efficace de la circulation méridienne et du transport de chaleur méridien. Un gradient méridien d'une perturbation de salinité de surface induit une perturbation des vitesses zonales par la relation du vent thermique. Cette perturbation des vitesses zonales, par interaction avec le gradient zonal de température, crée une perturbation du gradient zonal de température. Ce dernier induit, par la relation du vent thermique, une perturbation des vitesses méridiennes qui modifie la circulation méridienne ou le transport de chaleur méridien. En outre, l'obtention de perturbations optimales nous permet de borner les variations de la circulation. En posant une perturbation d'une intensité équivalente aux *Great Salinity Anomalies*, nous obtenons une modification bornée à 0.75 Sv et à 0.03 PW.

Abstract

One of the consequences of the global warming is the modification of the hydrological cycle and then of the freshwater flux get by the ocean. These flux have local influence on the sea surface salinity and thus influence the large scale ocean circulation. The ocean circulation, and more accurately the thermohaline circulation, is able to produce some low frequency variability, as the slow part of the climate system. We are going to study the impact of the freshwater flux on the thermohaline circulation and mainly on the decadal to millennial variability.

In the ocean, as in all dynamical systems, two paradigms coexist for the explanation of the observed variability : it can be endogenous or exogenous.

For the first paradigm, the variability comes from internal mode as relaxation oscillation or non-linear saturation of a linear growth mode : This theory is intrinsically linked with non-linear effects.

The second paradigm is based on the existence of an asymptotic stable steady state and of external stimulation sustaining the variability : transient growth of initial perturbations or oscillation sustains by stochastic forcing. Actually, the non-normality of the ocean dynamic allows some strong variability around a steady state even if it is stable.

During this thesis, we sought to identify the variability appearing under different freshwater flux regimes. For this we implemented systematical methods of analysis as linear the stability analysis or the general stability analysis in a hierarchy more and more realistic models (Howard-Malkus loop model, 2D latitude-depth model, planetary-geostrophic model or OPA model in global realistic configuration). These methods allow us to extract the physical mechanisms linked to internal variability modes or forced variability modes.

Some outstanding results appear. During the study of endogenous variability in a 2D latitude-depth model, the growth mechanism and the oscillation one of a centennial mode are analyzed and their characteristics are described. This mode, corresponding to a salinity dominated density anomaly advected around the circulation, is feed by the positive salinity feedback on the advection in the freshwater forcing zone.

A millennial oscillation cycle which appears through an infinite-period bifurcation is characterized. The bifurcation is due to higher frequency mode presence during the millennial cycle. Thus, we point out that the centennial oscillation is a precursor of millennial

oscillation.

During the study of the exogenous variability, the optimal perturbations of the sea surface salinity influencing the ocean circulation are performed in a latitude-depth model of the thermohaline circulation. We analyzed an optimal finite time growth : an ocean circulation intensity growth, 67 yr after the sea surface salinity perturbation, is not even possible but optimal. The optimal perturbation correspond to a stimulation of the centennial oscillation when this latter is reinforced through the positive salinity feedback on advection in the evaporation-precipitation zone. The optimal perturbation of the freshwater flux confirms the idea that an increase of the intensity flux decreases the ocean circulation in such kind of model. The optimal stochastic perturbation of the freshwater flux shows the strong response less damped linear mode, here the centennial oscillation. The other parts of the ocean spectrum response to the optimal stochastic perturbation correspond to a red noise.

In the same way, 24 yr transient growth is optimal through the multi-decadal oscillation appearing in a planetary-geostrophic model. Optimal stochastic perturbations studies show the strong response at the frequency of the less damped eigenmode with an intensity controlled by the non-normality of the system. Because the variability is strongly controlled the surface boundary condition (*i.e.* mixed conditions or flux conditions), the shape of the optimal perturbations and their response is too.

Finally, using a primitive equation model in global realistic configuration, an optimal growth of the meridional ocean circulation intensity and of the meridional heat transport intensity appear respectively at 10.5 yr and 2.2 yr after the sea surface salinity perturbation. These optimal initial perturbations allow us to determine an efficient growth mechanism of the meridional circulation and of the meridional heat transport. A meridional gradient of the sea surface salinity perturbation induces a perturbation of the zonal velocities by the thermal wind relation. This perturbation of the zonal velocities, by interaction with the zonal gradient of temperature, creates a perturbation of the zonal gradient of temperature. This latter induces, by the thermal wind relation, a perturbation of the meridional velocities which modifies the meridional circulation or the meridional heat transport. Moreover the study of optimal perturbations allow us to fix bounds of the circulation variations. By taking a perturbation equivalent to the Great Salinity Anomalies, we obtain modification bounds of 0.75 Sv and 0.03 PW.

Introduction

Le climat

Le climat est la synthèse des conditions atmosphériques dans une région donnée pendant une période d'environ 30 ans. Il est contrôlé par un système dynamique complexe qui peut se définir à travers cinq sphères : l'atmosphère, la lithosphère, l'hydrosphère, la cryosphère et la biosphère (Fig. 1).

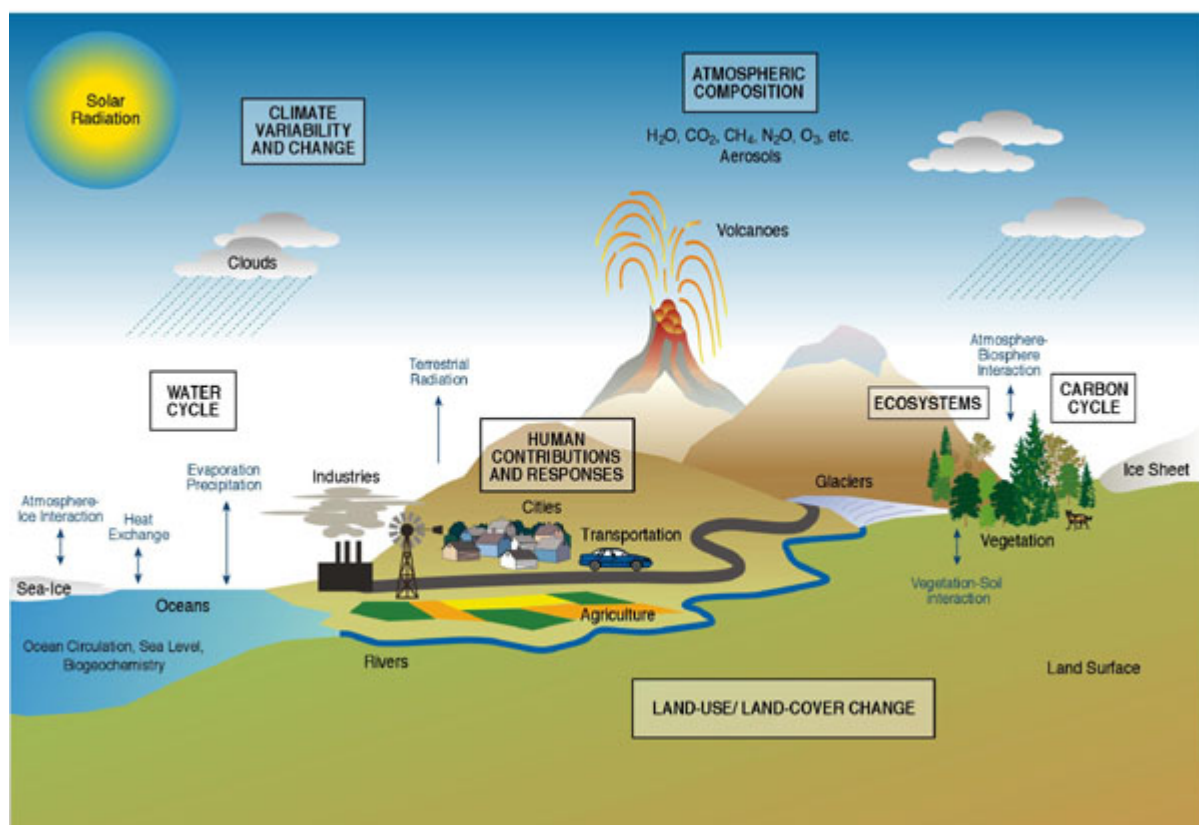


FIG. 1 – Représentation des éléments principaux du système climatique (www.climate-science.gov).

L'atmosphère, constituée par la surface gazeuse de la Terre, possède une dynamique rapide s'équilibrant sur une échelle de temps de quelques mois. C'est la température et l'hydrométrie atmosphériques ressenties à la surface de la terre qui permettent de définir le climat d'une région.

La lithosphère est constituée par la partie solide du système climatique, à savoir les continents. Elle est souvent considérée comme neutre sur le plan dynamique étant donné son échelle de temps extrêmement longue (car liée aux mouvements des plaques). Néanmoins, cette sphère fixe les montagnes qui sont les lieux de formation de certains glaciers terrestres, l'emplacement des rivières et la forme des bassins océaniques. De même, cette sphère réchauffe les autres sphères en réémettant la chaleur reçue par rayonnement

ou en libérant la chaleur interne de la Terre *via* les volcans. De plus, pour ce dernier point, il y a libération de gaz, ce qui constitue un forçage de la lithosphère sur l'atmosphère. De ce fait, bien que peu dynamique à l'échelle du climat moderne, cette sphère est très importante puisqu'elle fixe les conditions limites des autres sphères.

L'hydrosphère correspond à toute l'eau liquide terrestre. Ceci comprend, entre autres, les mers, les lacs, les fleuves et bien sûr l'océan. Ce dernier possède une grande surface exposée aux rayons solaires, les deux tiers de la surface du globe, et une forte capacité calorifique. La chaleur stockée par l'océan est sans commune mesure avec celle stockée par l'atmosphère. En effet, les trois premiers mètres océaniques contiennent autant de chaleur que l'atmosphère dans son entier. Ceci a pour conséquence une forte modification de la température atmosphérique de surface en fonction du transport de chaleur océanique. L'océan, et plus généralement l'hydrosphère, a donc un impact thermique sur le climat qui est loin d'être négligeable.

La cryosphère se définit par le contenu en glace de la surface du globe. Ceci représente aussi bien les glaciers présents sur les continents que les glaces de mer. La présence de glaciers peut être comparée à un stock d'eau. Si la glace se met à fondre, ne serait-ce que par une augmentation locale de la température atmosphérique, la cryosphère peut se réduire et augmenter l'hydrosphère, ce qui pourrait modifier la dynamique océanique. En outre, la glace modifie l'albedo des surfaces qu'elle recouvre. Dans ces conditions, la cryosphère est à prendre en compte dans le bilan radiatif solaire reçu par la Terre. De la même façon, les glaciers terrestres ou la glace de mer modifient respectivement les transferts de chaleur et de masse entre l'atmosphère, la lithosphère et la biosphère ou l'atmosphère et l'océan. Ainsi, la cryosphère prend part à la dynamique du climat planétaire.

La biosphère constitue la sphère du vivant. Cette sphère peut influencer le climat de différentes façons. Elle modifie le flux solaire reçu par la lithosphère en le captant en premier. En effet, une terre aride absorbe plus de chaleur solaire qu'une terre luxuriante. De plus, la biosphère est une partie importante du cycle du carbone et a donc une influence directe sur la concentration du dioxyde de carbone, principal gaz à effet de serre. De cette façon la biosphère influence l'atmosphère, l'hydrosphère et la cryosphère. La biosphère comprend une part anthropique qui modifie le cycle naturel du dioxyde de carbone et augmente, notablement depuis l'industrialisation, la concentration des gaz à effet de serre dans l'atmosphère. Il y a, bien entendu, des modifications anthropiques de la biosphère comme la déforestation ou l'agriculture, des modifications de l'hydrosphère comme les barrages hydro-électriques et, dans une moindre mesure, des modifications de la lithosphère par la construction de routes ou l'implantation de villes en constante expansion.

Le climat peut donc être défini comme le résultat des multiples rétroactions entre ces cinq différentes sphères (Fig. 1) et, comme nous venons de le définir, sa dynamique est riche et complexe. Une étude de Vautard et Ghil (1989) propose d'estimer la dimension dynamique du système climatique à partir de données de paléoclimat. Leur résultat est que 5 à 10 variables sont nécessaires pour représenter le climat. Cette estimation correspond à un nombre de degrés de liberté conséquent, autorisant une variabilité d'une extrême complexité. C'est pourquoi, dans la suite de notre succincte présentation du climat, nous

allons présenter quelques travaux montrant la richesse de la variabilité climatique.

Variabilité climatique

La variabilité climatique possède des échelles de temps multiples à l'image des nombreuses rétroactions pouvant les engendrer. Ainsi, l'étude de Mitchell (1976) résume au travers d'un spectre (Fig. 2) des échelles de variabilité allant de plusieurs centaines de millions d'années à la demi-journée. Les cycles diurne et saisonnier, deux échelles de temps, provenant des changements d'ensoleillement, respectivement aux cours de la journée et de l'année, dominent le spectre. D'autres échelles de temps existent de l'ordre de la dizaine de milliers, du millier, de la centaine et de la dizaine d'années comme le montrent les « bosses » dans le spectre de Mitchell (1976) ou de Ghil (2002, reproduit en Fig.2).

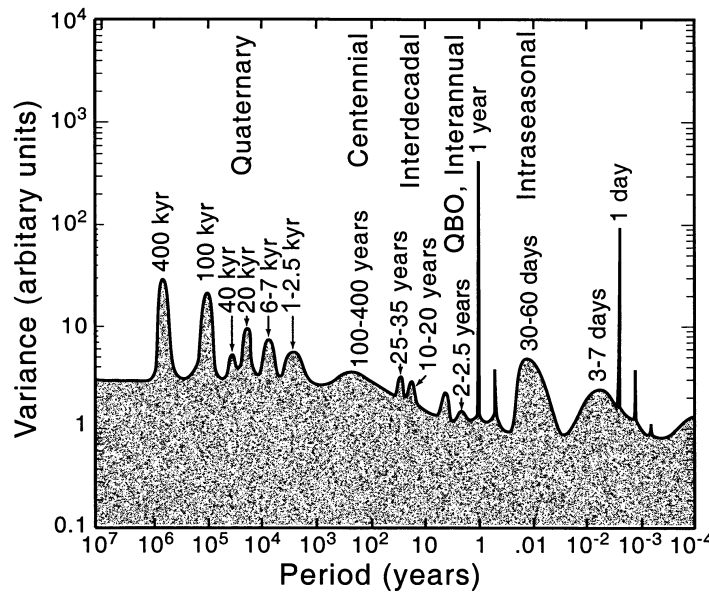


FIG. 2 – Spectre schématique du climat (reproduction de Ghil, 2002).

Petit et al. (1999) montrent, en s'appuyant sur une carotte glaciaire, la forte variabilité des dernières 420 milliers d'années (kyr) pouvant culminer jusqu'à des différences de 8°C aux cours du temps (Fig 3). De la même façon, Liesicki et Raymo (2005) étudient 57 relevés de l'isotope $\delta^{18}\text{O}$ répartis tout autour du globe. Ces relevés leur permettent de localiser différentes périodes de variabilité dans des échelles de l'ordre de 10 kyr. Ces périodes sont associées aux cycles de Milankovitch, du nom de l'astronome qui les relia aux cycles d'ensoleillement induits respectivement par la précession (19, 22 et 24 kyr), l'obliquité (41 kyr) et l'excentricité (95, 125 et 400 kyr) de l'orbite terrestre. Néanmoins, la réponse du climat à de tels changements d'ensoleillement n'est pas si linéaire.

Bien que les pics climatiques correspondent aux cycles de l'orbite terrestre, Ghil (1994) propose, pour le pic à 100 kyr, que l'énergie nécessaire à une réponse du climat de l'intensité des mesures de paléoclimat n'est possible que par une résonance non-linéaire du système climatique. Gildor et Tziperman (2001) proposent un mécanisme d'oscillation du système climatique d'une période de 100 kyr. Le modèle climatique utilisé met en jeu des représentations idéalisées de l'atmosphère, l'océan et la cryosphère (glace de mer et glaciers terrestres). Ce modèle, bien que peu représentatif de la complexité du climat, permet d'y faire apparaître une oscillation interne du type oscillation de relaxation (appelée « en dents de scie » par les auteurs). Ce modèle est réutilisé par Gildor et Tziperman (2000) et un forçage par les cycles de Milankovitch y est imposé. Il apparaît une variabilité dont les caractéristiques temporelles sont comparables aux mesures paléoclimatiques.

Huybers et Wunsch (2004), en utilisant une autre façon de relier l'âge des carottes de glace en fonction de leur profondeur (*Depth-derived age estimate* au lieu de *orbital tuning age estimate*), montrent qu'il existe de l'énergie d'interaction entre les différents pics de Milankovitch. Ce résultat laisse penser que la réponse du système climatique aux cycles de Milankovitch est non-linéaire. Wunsch (2004) avance, quant à lui, que le pic à 100 kyr n'existe pas. C'est-à-dire que la réponse du climat à cette échelle de temps n'est pas isolable de la réponse à un bruit stochastique.

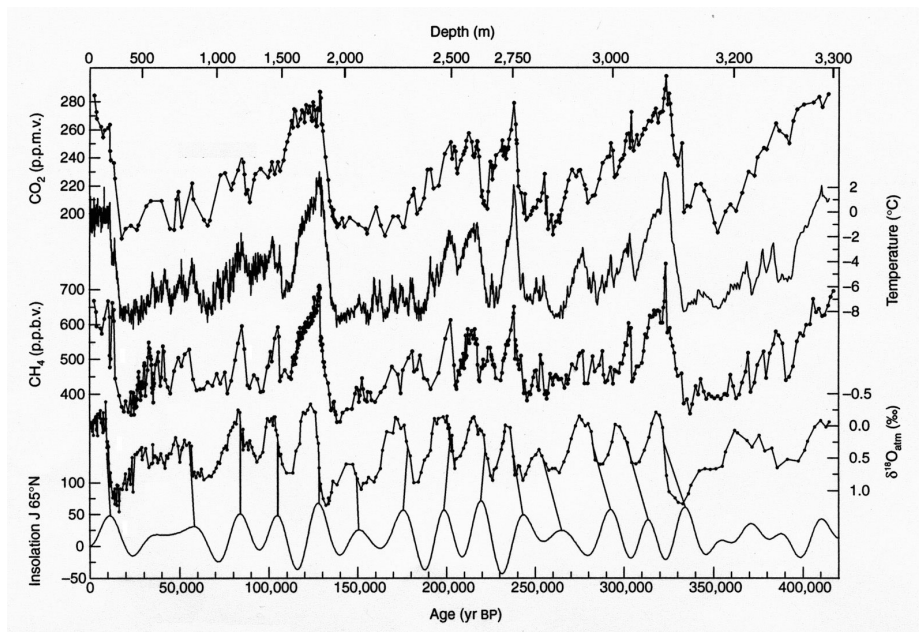


FIG. 3 – Données de carottes glaciaires de Vostok (Petit et al., 1999).

L'étude des échelles de temps plus rapides renvoie à une des préoccupations actuelles de la recherche climatique, à savoir la stabilité du climat présent. En effet, ce climat, dit de la période holocène, est caractérisé par son état particulièrement stable au cours des 10 000

dernières années, en comparaison aux climats des 250 000 dernières années (Dansgaard et al., 1993). Cette stabilité relative s'oppose aux différentes mesures, dont les analyses des carottes glaciaires, montrant l'existence d'une forte variabilité climatique des 123 000 dernières années sur des échelles de temps du millier d'années (GRIP Members, 1993; Alley, 2000; NGRIP Members, 2004, Fig. 4).

Cette forte variabilité, appelée événement de Dansgaard-Oeschger, est fixée aux alentours de 1500 années (yr) (Ganopolski et Rahmstorf, 2002; Rahmstorf, 2003). Comme expliqué par Rahmstorf (2002), ces événements sont les plus marquants des 120 000 dernières années. Ils se décomposent en deux phases : un fort réchauffement global de 5 à 10 °C en quelques décennies puis un refroidissement lent en quelques siècles. Cette variabilité millénaire a pour conséquence des périodes dites glaciaires, dont la dernière, « le petit âge glaciaire », est apparue au cours du moyen-âge (Bond et al., 1997). Dans l'océan Atlantique, ce type de variabilité se caractérise par deux phases : une circulation thermohaline forte, proche de la circulation actuelle, et une circulation thermohaline faible correspondant à un état glaciaire (Alley et al., 1999).

Néanmoins, à cause de l'effet d'*aliasing* d'un échantillonnage imparfait du cycle saisonnier (induisant un pic précis et intense, étant donné l'énergie du cycle saisonnier, autour de 1500 yr dans l'espace spectral), Wunsch (2000) met en doute l'existence d'une période de variabilité précise (un pic dans l'espace spectral) et propose la vision d'une bande spectrale de variabilité à l'échelle millénaire.

Ce type de variabilité a pu être reproduit dans des modèles de circulation thermohaline où seules la température et la salinité sont pronostiques et où les vitesses sont à l'équilibre géostrophique (Winton et Sarachik, 1993; Winton, 1993, 1995; Chen et Ghil, 1995). Néanmoins, la variabilité diffère de celle des données puisque la circulation passe maintenant d'une circulation thermohaline positive à une circulation thermohaline inversée, au lieu de faible dans les données. Des travaux plus récents, effectués dans un modèle 2-D latitude-profondeur, montrent que cette variabilité est caractérisée par une période fortement dépendante de la distance à la bifurcation (Colin de Verdière et al., 2006).

Les données révèlent l'existence de variabilités climatiques encore plus rapides. Ainsi, l'échelle centenaire fut montrée comme prédominante dans l'Atlantique nord par Stocker et Mysak (1992). Les auteurs suggèrent l'existence de mode océanique interne pour expliquer une telle variabilité. Des échelles de temps centenaires ont pu être trouvées dans des modèles océaniques de circulation générale sous forçage stochastique (Mikolajewicz et Maier-Reimer, 1990). Ce résultat a été reproduit dans des modèles à fond plat idéalisés à trois et deux dimensions par Winton et Sarachik (1993). Les auteurs montrent que l'utilisation d'une simple boucle suffit à représenter les mécanismes oscillatoires. Dans un modèle idéalisé à deux dimensions, forcé par un rappel de la température océanique de surface sur la température atmosphérique et un flux d'eau douce, Mysak et al. (1993) décrivent cette oscillation centenaire dans une configuration à deux hémisphères. Quon et Ghil (1995) trouvent le même type d'oscillations apparaissant, à travers une bifurcation de Hopf, dans un modèle en boîtes sous des régimes de flux d'eau douce suffisamment

intense. Ce dernier résultat est cohérent avec l'étude dans un modèle en boîtes de Tziperman et al. (1994).

Dans les observations, un mode de variabilité océanique est particulièrement cohérent (Kushnir, 1994; Delworth et Mann, 2000) : la variabilité multi-décennale de l'Atlantique. Elle est caractérisée par une échelle de temps de l'ordre de 40-60 yr. Sa signature en température de surface a été reproduite dans différents modèles numériques de différentes complexités (Latif, 1997).

Chen et Ghil (1995), dans un modèle aux équations primitives dans une configuration de bassin rectangulaire à fond plat, retrouvent de la variabilité multi-décennale. Cette variabilité a une période de l'ordre de 20-50 yr et apparaît sous une évaporation nette aux hautes latitudes. Chen et Ghil (1996) utilisent un modèle océanique équivalent au précédent en y couplant un modèle atmosphérique. Il y apparaît de la variabilité multi-décennale d'une période de 40-50 yr. La variabilité est définie par un cycle limite résultant d'une bifurcation de Hopf lorsque le coefficient de diffusion de la température atmosphérique ou le coefficient de couplage air-mer varient. Pour ces deux derniers travaux (Chen et Ghil, 1995, 1996), les flux de chaleur de surface sont un des mécanismes centraux à la variabilité. Huck et al. (1999) retrouvent ce mode de variabilité dans un modèle planétaire-géostrophique dans un bassin rectangulaire à fond plat. La variabilité correspond à une oscillation de la température, seule variable dynamique du modèle, sur une période multi-décennale.

Certaines de ces études (Colin de Verdière et Huck, 1999; Huck et Vallis, 2001; Te Raa et Dijkstra, 2002) ont été faites dans des modèles idéalisés de dynamique planétaire-géostrophique dans un bassin rectangulaire à fond plat représentant l'Atlantique nord. Elles suggèrent que cette variabilité peut provenir de la croissance, par instabilité barocline grande échelle, d'un mode linéaire saturant non-linéairement sur un cycle limite. Une autre étude (Arzel et al., 2006) montre que les conditions aux limites en surface sur la température et la salinité modifient fortement la variabilité d'un état d'équilibre. Les auteurs trouvent que les différents modes de forçage (rappel sur la température et la salinité de surface; conditions mixtes correspondant à un rappel sur la température et flux de salinité en surface; condition en flux pour la température et la salinité) entraînent respectivement, un état d'équilibre stable, un état d'équilibre instable par un mode oscillant croissant, et un état d'équilibre instable par un mode linéaire croissant. Ainsi, dans ces modèles idéalisés, la représentation de la variabilité multi-décennale de l'Atlantique semble étroitement liée au forçage de surface en conditions mixtes.

Des études récentes tendent à montrer l'influence de cette variabilité multi-décennale de l'Atlantique sur le climat. Sutton et Hodson (2003) mettent en évidence dans un modèle atmosphérique de circulation générale que les modifications de la température océanique de surface, au cours des années 1871-1999, induisent une modification du climat nord Atlantique. Sutton et Hodson (2005) proposent d'extraire la composante de la variabilité multi-décennale dans les données de température de surface océanique. Ces données sont alors injectées comme forçage du modèle atmosphérique de circulation générale. Il en découle des modifications de la température de surface continentale (augmentation aux

États-Unis). De la même façon, les précipitations sont modifiées (augmentation en Europe et diminution aux États-Unis et dans le nord du Mexique). En utilisant un modèle de climat, Knight et al. (2005) reproduisent la variabilité multi-décennale Atlantique et suggèrent qu'elle modifie l'intensité de la circulation méridienne de l'ordre de 1 Sv. Cette modification de la circulation induit un réchauffement de la température moyenne globale de 0.6°C au cours du XX^e siècle. Dans une autre étude sur l'impact de la variabilité multi-décennale sur le climat, Knight et al. (2006) montrent une corrélation entre cette variabilité et les précipitations du nord-est du Brésil, du Sahel africain et du nord-ouest de l'Europe. De même, ils relient l'activité cyclonique sur l'Atlantique à cette variabilité multidécennale.

Nous pourrions également citer l'existence de variabilité de plus hautes fréquences. L'oscillation nord Atlantique, correspondant à un dipôle de pression entre les Açores et l'Islande, agit sur une période de 7-8 yr and 13-15 yr (Moron et al., 1998). Cette oscillation modifie notamment le climat des régions européennes. *El Niño-southern oscillation*, se localisant dans le Pacifique sur une période de 5 yr, modifie de façon sévère les zones est et ouest autour du Pacifique équatorial et a des répercussions à l'échelle globale.

L'un des candidats à l'explication de ces différentes variabilités basses fréquences est la circulation océanique, comme le montrent Simonet et al. (2005) pour la période à 7-8 yr précitée. L'océan, et notamment la circulation thermohaline, charrie énormément d'énergie et de chaleur. Cela provient de sa forte capacité à stocker de la chaleur et de sa circulation agissant à l'échelle du globe. De fait, cette circulation a un impact important sur le climat, à l'image du Gulf Stream et de la dérive nord Atlantique qui font bénéficier de leur apport de chaleur les régions d'Europe de l'ouest. Nous nous proposons d'exposer sommairement les théories de cette circulation océanique avant d'explicitier ses différents modes de variabilité.

Circulation océanique

La circulation océanique est principalement forcée à sa surface. Il existe toutefois des apports de chaleur *via* les flux géothermiques et le fait que le rayonnement solaire pénètre un peu dans l'océan. Néanmoins, les forçages principaux sont : la tension exercée par le vent, le flux de chaleur et le flux d'eau douce. Ce dernier peut être décomposé en trois termes : le flux d'évaporation-précipitation, le flux des rivières et le flux dû aux fontes de glace.

La tension de vent induit une mise en mouvement de la couche supérieure de l'océan, appelée couche d'Ekman. Les convergences ou divergences horizontales de la couche de surface océanique induisent des mouvements verticaux à la base de cette couche. Ces mouvements verticaux dus aux vents sont appelés pompes d'Ekman. Cette modification de la couche d'Ekman entraîne des gradients de pression. Une mise en mouvement de l'intérieur de l'océan (océan sous la couche d'Ekman) intervient afin qu'un équilibre, dit

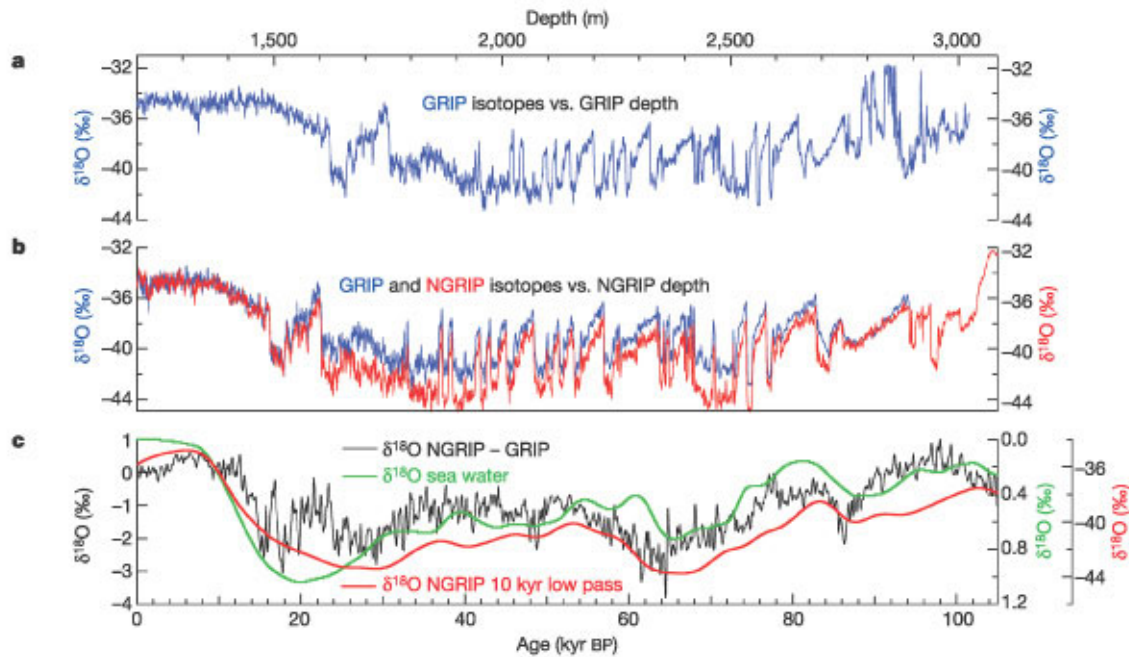


FIG. 4 – Données de carottes glaciaires (NGRIP Members, 2004).

géostrophique, puisse s'établir entre l'accélération de Coriolis et ces gradients de pression induits par le vent. Ce mécanisme permet d'obtenir des mouvements de grandes échelles représentant les gyres à l'échelle des bassins.

L'étude de Sverdrup (1947) permet d'obtenir la circulation à l'intérieur du bassin (loin des couches frictionnelles) en fonction du pompage d'Ekman. Par la suite, Stommel (1958), en utilisant la relation de Sverdrup (1947) avec une friction sur le fond et sous l'approximation d'un fluide homogène, obtient une circulation en gyre intensifiée sur le bord ouest. Cette intensification sur le bord ouest est caractéristique des circulations océaniques (Gulf Stream, Kuroshio, courant du Brésil, courant est Australien, courant des Aiguilles). Une étude similaire a été menée par Munk (1950), mais ici la fermeture dissipative ne se fait plus par friction sur le fond mais par diffusion latérale.

Une étude plus récente de Huang et Schmitt (1993) reprend une étude de Goldsbrough de la première moitié du XX^e qui proposait que la circulation des gyres était due aux gradients de pression induits par le flux d'évaporation-précipitation à la surface des océans. Cette étude montre que la circulation résultante est faible et s'oppose à celle induite par le vent. Bien que l'intuition de Goldsbrough, que les flux d'eau douce contrôlent la circulation en gyre des bassins, soit fautive, elle était précurseur des études de Stommel (1948) et Munk (1950) puisqu'il proposait l'idée que les vitesses verticales en surface induisent une circulation grande échelle. Huang et Schmitt (1993) proposent, quant à eux, que la prise en compte du flux d'évaporation-précipitation, en plus de celle du vent, puisse décaler la zone de séparation d'un courant de bord ouest comme le Gulf Stream.

Un autre pan de l'étude théorique de la circulation océanique grande échelle concerne la circulation profonde. Stommel et Arons (1960a,b) considèrent un océan profond homogène (car les plus gros gradients de densité existent dans les mille premiers mètres de l'océan), la présence d'une source locale d'eau de la même densité que celle de l'océan profond dans l'Atlantique nord, et d'une remontée globale des eaux dans le reste du bassin équilibrant l'apport d'eau de la source. Le dernier postulat induit des vitesses verticales positives sur l'étendue du bassin, pouvant être interprétées comme un pompage des eaux de l'océan profond. Ainsi, en utilisant une forme de la relation de Sverdrup (1947), ils montrent l'existence d'une circulation allant vers le nord dans l'hémisphère nord et vers le sud dans l'hémisphère sud, avec une recirculation le long des bords ouest (Fig. 5).

Plus récemment, Kawase (1987) a étendu ces études à un modèle à deux couches homogènes, où celle de fond représente l'océan profond des études précédentes. La couche de surface subit alors un puits local en miroir à la source locale de la couche de fond et une source globale en miroir à la remontée des eaux de la couche de fond. Dans cette étude, la remontée globale de l'eau de fond n'est pas imposée et résulte donc de la dynamique interne du modèle. Sous certains régimes de paramètres (fort rappel de l'interface entre les deux couches), Kawase (1987) retrouve les résultats de circulation profonde de Stommel et Arons (1960a,b).

La lacune de ces études est l'approximation systématique de l'océan comme homogène. Même l'étude de Kawase (1987) qui considère un modèle à deux couches, donc deux eaux de densités différentes, ne prend en compte ni les gradients de densité et donc leurs effets sur la circulation, ni les flux de densité à la surface.

Les gradients de densité sont induits par les flux de chaleur et d'eau douce en surface agissant respectivement sur la température et la salinité. En effet, les flux de chaleur et d'eau douce ne sont pas uniformes à la surface des océans. L'équateur reçoit en moyenne plus de chaleur que les pôles, et les moyennes latitudes sont le siège de précipitations alors que les tropiques sont le siège d'évaporation. La circulation due à ces gradients est appelée « tapis roulant océanique » (Fig. 6) ou circulation thermohaline. Il correspond à une circulation globale reliant tous les bassins entre eux. Il se décompose souvent en une branche d'eau froide circulant en profondeur et un courant de retour, appelé branche chaude, circulant en surface. La branche froide part de l'Atlantique nord, dessert l'Atlantique sud puis l'océan Indien et l'océan Pacifique *via* le courant Circumpolaire. La branche chaude part du Pacifique nord, passe entre les îles Indonésiennes pour rejoindre l'océan Atlantique, et remonte enfin dans le bassin Atlantique jusqu'au pôle nord.

Une des premières représentations de cette circulation correspond au travail de Stommel (1961). Cette étude se limite à l'Atlantique nord en réduisant l'océan en deux boîtes de densité homogène. La première boîte correspond au pôle nord alors que la seconde représente la zone équatoriale. Les deux boîtes subissent en surface un forçage de température et de salinité différent et sont reliées à la surface et au fond afin d'autoriser des échanges. Le premier résultat est la mise en mouvement et l'apparition d'une circulation. Ce résultat n'est pas anodin.

En effet, l'apparition d'une circulation alors que les seuls forçages sont sur la densité

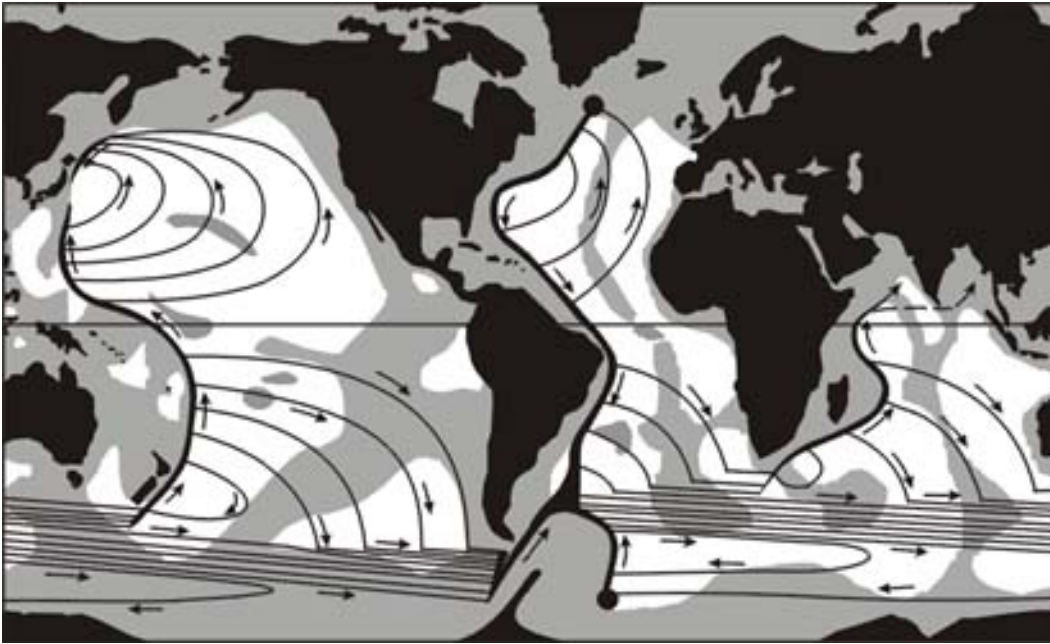


FIG. 5 – Circulation profonde de Stommel (1958).

et appliqués à la même profondeur viole, à première vue, le théorème de Sandström¹. Cependant, le protocole expérimental de Stommel (1961) prévoit que chacune des deux boîtes est homogène, ce qui, comme précisé dans l'article, induit l'utilisation d'un mode de mélange. C'est ce mélange qui est la source d'énergie nécessaire, d'après le théorème de Sandström, pour créer du mouvement si on force sur la densité à la même profondeur. Il est à remarquer que tous les modèles en boîtes ont, par construction, un apport de puissance infinie *via* le mélange. Si nous faisons l'hypothèse de boîtes homogènes il faut de l'énergie pour mélanger parfaitement les quantités thermodynamiques de ces boîtes instantanément.

Le deuxième résultat de l'étude de Stommel (1961) est l'existence d'équilibres multiples, c'est-à-dire que pour les mêmes paramètres deux circulations différentes peuvent se mettre en place. L'une est appelée thermique. Elle correspond à une circulation de surface vers le nord et une circulation de fond vers le sud, à l'image du « tapis roulant océanique ». L'autre circulation est appelée haline. Elle correspond à une circulation inverse de la première et elle est d'une intensité moindre. La présence d'équilibres multiples de la circulation océanique a été retrouvée dans des modèles de plus grande complexité. Quon et

¹Le théorème de Sandström dit qu'un fluide forcé par un gradient de température ne peut maintenir une circulation que si on le chauffe à une profondeur strictement supérieure à celle où on le refroidit. Néanmoins, ce théorème a été remis en cause par de récentes expériences montrant qu'il existe une circulation induite par un gradient de température même lorsque l'on chauffe à une profondeur inférieure ou égale à celle où l'on refroidit (Coman et al., 2006). Cette circulation est plus faible que celle induite par la configuration inverse (où l'on chauffe à une profondeur supérieure à celle où l'on refroidit) mais est du même ordre.

Ghil (1992), dans un modèle 2D latitude-profondeur représentant les deux hémisphères, montrent l'existence d'équilibres multiples. Lorsque l'intensité du flux d'eau douce augmente, un équilibre stable, correspondant à une circulation à deux cellules symétriques, se déstabilise à travers une bifurcation fourche et laisse apparaître deux équilibres stables, correspondant à deux circulations asymétriques à une seule cellule.

D'autres modèles de la circulation thermohaline existent à l'image des études de Howard (1971) et Malkus (1972) qui utilisent un tube fermé pouvant être forcé sur son grand rayon. Cette boucle, appelée communément boucle d'Howard-Malkus, permet d'obtenir de façon analytique ses équilibres et d'étudier leur stabilité. Ce modèle a l'avantage de ne pas cacher de terme de mélange. D'ailleurs Wunsch (2005), après être passé du modèle en boîtes de Stommel (1961) à celui en boucle d'Howard-Malkus, utilise le modèle en boucle pour illustrer le théorème de Sandström. Il apparaît bien qu'il faut chauffer plus profondément que l'on refroidit pour avoir du mouvement. Dans les autres cas un mélange est nécessaire.

Dans le cas de la circulation océanique, puisque le forçage est injecté à la surface de l'océan (le lecteur remarquera que l'océan est réchauffé plus haut qu'il n'est refroidi en terme de géopotentiel), il est donc nécessaire d'avoir une source de mélange (et donc d'énergie) afin d'expliquer la circulation. Munk et Wunsch (1998) ainsi que Wunsch et Ferrari (2004) proposent les ondes internes, produit de la marée, et le vent comme source d'énergie au maintien de la stratification.

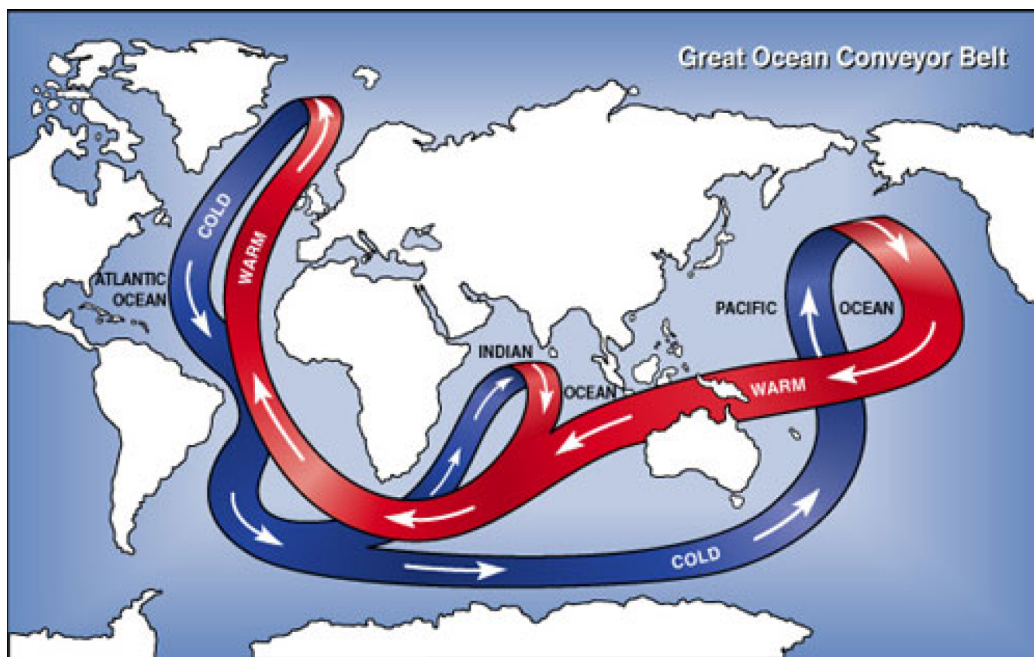


FIG. 6 – Représentation schématisique du « tapis roulant océanique » ou *the great ocean conveyor belt* (www.anl.gov).

Ben Jelloul et Huang (2006) réconcilient ces deux vues de la circulation profonde. Cette étude permet d'obtenir à la fois la stratification et la circulation profonde en utilisant le principe de production maximale d'entropie. Ce calcul se limite à la circulation océanique de l'Atlantique nord sous la thermocline et hors des zones de convection. La base de la thermocline est le siège du forçage de chaleur de l'océan profond. De plus, la zone de convection, confinée au nord, est esclave de la circulation profonde et permet de satisfaire la conservation de la masse. Cette méthode permet notamment de retrouver la circulation profonde de Stommel et Arons (1960a).

Objectif de la thèse

L'étude de Mann et al. (1999) montre que le XX^e siècle est sujet à une forte augmentation de la température moyenne par rapport au dernier millénaire (Fig. 7). Cette augmentation est d'autant plus intrigante qu'elle apparaît brusquement après un millénaire ayant une tendance au refroidissement. Ce réchauffement est encore plus significatif dans les cinquante dernières années du XX^e siècle puisqu'il permet d'atteindre des valeurs jamais observées au cours du dernier millénaire.

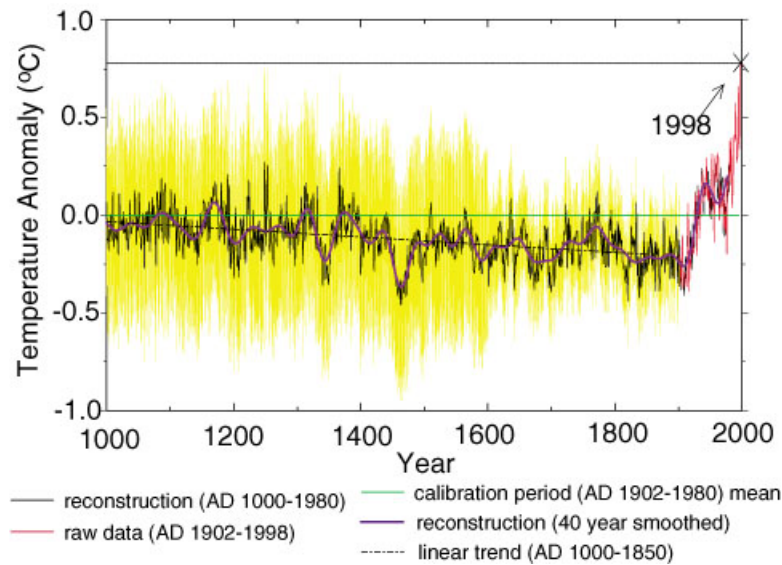


FIG. 7 – Changement climatique durant le siècle dernier (Mann et al., 1999).

Une des conséquences attendues du réchauffement climatique est la modification du cycle d'eau douce, l'un des forçages principaux de la circulation thermohaline. En effet, les flux d'eau douce ont un impact local sur la salinité de surface océanique et donc sur la dynamique océanique. Josey et Marsh (2005) montrent que la salinité de surface océanique a été modifiée depuis le milieu des années 1970 du fait d'une augmentation des précipitations dans le gyre subpolaire nord Atlantique. Les modifications de la salinité océanique dans la dernière décennie existent aussi dans des zones plus profondes

de l'Atlantique nord (Curry et al., 2003; Curry et Mauritzen, 2005). Ces études mettent en exergue que le cycle de l'eau est la partie la moins bien comprise du système climatique puisque les mesures des flux d'évaporation-précipitation au dessus des océans ont de fortes incertitudes. Nous nous proposons d'identifier les variabilités potentiellement induites à travers de tels changements de la salinité des océans. Weaver et al. (1991) a montré le rôle essentiel du flux d'eau douce non seulement sur les caractéristiques de l'état d'équilibre de l'océan mais aussi sur sa stabilité et sa variabilité. De plus, comme explicité précédemment, la circulation thermohaline étant la composante lente du système climatique, elle est la meilleure candidate à la production de variabilité basse fréquence. C'est pour cela que nous allons prêter toute notre attention dans cette thèse à l'impact du flux d'eau douce sur la circulation thermohaline.

La variabilité océanique, comme tout autre variabilité, peut être analysée selon deux paradigmes. Le premier correspond à la variabilité endogène, c'est-à-dire la variabilité interne du système. Le deuxième correspond à la variabilité exogène, c'est-à-dire à la variabilité du système résultant d'une excitation extérieure.

Dans le cadre de la variabilité endogène, le système est capable de s'extraire de l'énergie afin de générer et d'entretenir de la variabilité. Pour étudier ce type de variabilité, qui est toujours relié à des phénomènes non-linéaires, une méthode consiste à mieux décrire l'état des bifurcations dans l'espace des paramètres (Dijkstra et Ghil, 2005). Suivant cette idée, Stone et Krasovskiy (1999) ainsi que Titz et al. (2002) indiquent que la taille du bassin d'attraction autour de l'état d'équilibre stable se réduit lorsque le flux d'eau douce augmente jusqu'à la déstabilisation, par une bifurcation de Hopf sous-critique, de l'état d'équilibre et l'apparition de variabilité sur un cycle limite. Ces études sont faites dans des modèles, représentant la circulation pôle-à-pôle de l'Atlantique, équivalant à celui de Stommel (1961) ayant, respectivement, trois ou quatre boîtes. De même, dans notre étude, l'intensité du flux d'eau douce sera notre paramètre préférentiel dans la caractérisation de la variabilité interne océanique et de ses bifurcations afin de mieux comprendre l'état de la circulation thermohaline.

L'autre paradigme correspond à la variabilité forcée. Dans ce cadre, Frankignoul et Hasselmann (1977) proposent qu'étant donné les échelles très rapide de l'atmosphère par rapport à celles de l'océan, nous pouvons considérer le forçage atmosphérique comme un bruit blanc. Les auteurs montrent que l'océan agit comme un simple intégrateur de ce bruit et que la réponse océanique est un bruit rouge. La vision de l'océan comme un intégrateur de la variabilité atmosphérique permet d'expliquer la dynamique basse fréquence dans la variabilité océanique. Plus généralement, l'étude de la variabilité exogène, au contraire de l'étude de la variabilité endogène, permet une approche linéaire si les perturbations sont d'une intensité suffisamment faible. Ainsi Farrell (1988), dans un modèle atmosphérique barotrope ayant un écoulement moyen zonal représentant le Jet Stream, trouve les modes optimaux et montre l'existence de croissances optimales. De la même façon, Farrell et Moore (1992) montrent les perturbations ayant les croissances les plus rapides dans un modèle quasi-géostrophique dans des régimes de circulation océanique applicables au Gulf Stream. Farrell et Ioannou (1996a) proposent d'étendre les analyses de stabilité linéaire

pour prendre en compte les croissances transitoires. Leur étude permet de poser le formalisme des perturbations initiales optimales ainsi que des perturbations optimales stochastiques et montre l'importance des non-normalités dans la dynamique linéaire. Finalement, Farrell et Ioannou (1996b) généralisent leur travail précédent à une étude sur des opérateurs non-autonomes, c'est-à-dire que l'état moyen évolue dans le temps (sur un cycle saisonnier par exemple). Dans la lignée de ces études, nous nous proposons, au cours de cette thèse, d'aborder les problèmes de perturbations optimales du flux d'eau douce modifiant le plus la circulation thermohaline.

Cette thèse s'articulera en deux chapitres, chacun correspondant à un paradigme de la variabilité de la circulation thermohaline.

Dans un premier temps (partie I), nous allons étudier deux types de variabilités endogènes. Pour cela nous allons utiliser un modèle latitude-profondeur représentant la moyenne zonale de la circulation océanique sous l'approximation planétaire-géostrophique (PG2D). La première variabilité endogène étudiée dans ce modèle correspond à la croissance d'une oscillation autour d'un équilibre instable, jusqu'à sa saturation sur un cycle limite. La deuxième variabilité correspond à une oscillation de relaxation évoluant sur des échelles millénaires induisant une forte modification de la circulation et donc du transport de chaleur. Cette oscillation a un impact potentiel énorme sur le climat du fait des modifications de transport de chaleur océanique qu'elle induit. En effet, elle possède des caractéristiques très proches des *flush* présentées dans l'étude de Weaver et Sarachik (1991).

Dans un deuxième temps (partie II), la variabilité induite par une perturbation extérieure sera étudiée. Ce chapitre sur la variabilité exogène se scindera en trois parties. La première, utilisant le modèle PG2D, s'intéressera à fixer la méthode de recherche de perturbations optimales. Pour cela trois questions seront abordées : quelle est la perturbation initiale, continue et stochastique de salinité de surface induisant le plus de changement de la circulation océanique ? Dans les trois cas, l'étude montre une forte réponse du mode centenaire décrit dans la première partie du chapitre précédent. Les variabilités induites et leur mécanisme inhérent seront analysés. Dans la deuxième partie, la variabilité endogène sera traitée dans un modèle planétaire-géostrophique à trois dimensions (PG3D). Nous évaluerons l'influence du choix de forçage thermique sur la réponse océanique, dans le cadre d'une perturbation initiale et d'une perturbation stochastique. Pour cela, nous utiliserons soit un rappel de la température de surface océanique à la température de surface atmosphérique, soit le flux de chaleur équivalent sera diagnostiqué à l'équilibre. Ce type d'étude permet de comparer ces deux forçages en s'affranchissant d'une quelconque modification de l'état d'équilibre. En outre, cette étude fait apparaître des croissances non-normales de la variabilité multi-décennale. Dans la troisième partie, la variabilité endogène induite par une perturbation de salinité de surface sera étudiée dans le cadre d'un modèle aux équations primitives en configuration réaliste globale (OPA). Deux modes de croissance particulièrement efficaces seront étudiés. Le premier induit une croissance de l'intensité de la circulation 10.5 yr après la perturbation. Le deuxième mode de croissance en temps fini, quant à lui, correspond à une anomalie du transport de chaleur 2.2 yr après

la perturbation. Une description de ces croissances transitoires et de leur mécanisme sera exposée.

Enfin, dans un dernier temps, nous procéderons à une synthèse des conclusions de chaque partie et nous proposerons des perspectives pour de futurs travaux.

Première partie

Variabilité océanique endogène

Dans le cadre de la variabilité endogène, le système est capable d'extraire de l'énergie afin de générer et d'entretenir de la variabilité. Ce type de variabilité endogène est lié à des processus non-linéaires. Nous pouvons citer en exemple les deux processus de variabilité que sont la saturation sous forme d'un cycle limite d'un mode instable oscillant, ou l'oscillation de relaxation comme l'oscillateur de Van der Pol (voir par exemple Strogatz, 1994).

Dans un contexte plus océanographique, Huck et al. (1999) étudient un modèle planétaire-géostrophique, limite sur des échelles spatiales de l'ordre du rayon de la Terre de l'approximation quasigéostrophique. Cette étude propose l'existence d'un mode instable oscillant sur des échelles décennales qui, en s'éloignant de l'état d'équilibre, sature sur un cycle limite décennal. Dans ce cas, une fois l'oscillation établie, c'est bien un processus non-linéaire, le cycle limite, qui caractérise l'oscillation. Sur des échelles de temps plus lentes, Colin de Verdière et al. (2006) s'intéressent à un modèle frictionnel, limite de la représentation en moyenne zonale du modèle planétaire-géostrophique. Ce travail montre l'existence d'oscillation de relaxation évoluant sur une échelle de temps millénaire. Ce type de variabilité nécessite des processus non-linéaires pour apparaître. Pour ce travail, un modèle frictionnel, limite de la représentation en moyenne zonale du modèle planétaire-géostrophique, est utilisé. Sur des échelles encore plus lentes, Gildor et Tziperman (2001) utilisent non plus sur un modèle d'océan plus ou moins idéalisé, à l'image des variabilités endogènes précitées, mais un modèle couplé océan-atmosphère-terre-glace très idéalisé. Ils proposent un mécanisme de variabilité interne du climat évoluant sur des échelles de plusieurs dizaines de milliers d'années. La variabilité qui y apparaît est une oscillation de relaxation, nécessitant donc des processus non-linéaires.

Pour notre étude nous nous proposons de rechercher de tels modes de variabilité sur des échelles de temps longues de la dynamique océanique (de l'ordre de la centaine au millier d'années). Pour ce faire, nous utiliserons un modèle 2D latitude-profondeur. La validité de tels modèles correspond à l'approximation d'un océan ajusté entre ses bords est et ouest, c'est-à-dire que les ondes de Rossby ont résolu les instabilités zonales. Il en découle un domaine de validité sur des échelles de temps longues, de l'ordre de plusieurs décades.

Nous caractériserons la variabilité et les bifurcations de la circulation thermohaline apparaissant sous des modifications du flux d'eau douce. Pour cela, la sensibilité de la circulation thermohaline sera explorée suivant une direction de l'espace des paramètres. Ce paramètre de contrôle sera l'intensité du flux d'eau douce.

Les changements de l'intensité du flux d'eau douce font apparaître deux régimes de paramètres induisant de la variabilité. Ces deux régimes des paramètres révèlent deux modes de variabilité différents. Le premier mode de variabilité est un mode linéaire centenaire saturant sur un cycle limite autour d'un état d'équilibre. Le deuxième est un mode de variabilité millénaire caractérisé par des changements brusques entre deux états radicalement différents en terme de stratification.

Ce chapitre s'articulera en deux axes. Le premier (chapitre 1) sera l'étude de la varia-

bilité centenaire, dans un bassin Atlantique à un ou deux hémisphères avec une possible ouverture au niveau du passage de Drake. L'étude sera menée à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire, d'un bilan de variance et d'une analogie avec la boucle d'Howard-Malkus. Le deuxième axe (chapitre 2) sera une étude du mode millénaire. Une attention toute particulière sera donnée aux bifurcations de type période-infinie induites lors de l'augmentation de l'intensité du flux d'eau douce. Ces bifurcations régissent le passage de ce mode de variabilité millénaire à un état d'équilibre. Un lien étroit entre ce mode millénaire et la rétroaction positive de salinité ainsi qu'avec le mode de variabilité centenaire sera exposé.

Chapitre 1

Oscillation centenaire

Des oscillations centenaires de la circulation thermohaline sont étudiées dans un modèle 2-D latitude-profondeur soumis à un forçage aux conditions mixtes (rappel en température de surface et flux d'eau douce).

L'oscillation apparaît à travers une étude de stabilité linéaire autour d'un état d'équilibre d'une circulation à un hémisphère.

Un budget de variance est utilisé pour nous aider à déterminer les processus physiques responsables de cette oscillation : le rappel en température de surface se révèle une source de la variance de densité. C'est une conséquence de la forte corrélation entre anomalies de température et de salinité.

Un modèle minimal unidimensionnel, la boucle d'Howard-Malkus, nous permet de mieux comprendre les mécanismes physiques de l'oscillation et de sa croissance.

L'oscillation centenaire est reliée à l'advection des anomalies de salinité autour de la boucle. Elle est aussi reliée à la rétroaction de salinité sur la circulation qui renforce les anomalies à travers des changements de temps de résidence dans les zones de flux d'eau douce.

Les solutions analytiques de ce modèle de boucle montrent que ces oscillations centenaires existent pour un régime de paramètres spécifiques fonction de l'amplitude du flux d'eau douce F_0 : les oscillations sont amorties si F_0 est trop faible, mais si F_0 est trop fort, l'instabilité croît exponentiellement sans osciller – le dernier régime est connu comme la rétroaction positive de salinité.

La robustesse de ces oscillations est analysée dans des configurations plus réalistes à deux hémisphères. Ces résultats sont de nouveau analysés avec le modèle en boucle, et comparés avec les oscillations trouvées dans les modèles de circulation générale.

Journal of Marine Research, 64, 355–392, 2006

On the mechanism of centennial thermohaline oscillations

by Florian Sévellec^{1,2}, Thierry Huck¹ and Mahdi Ben Jelloul¹

ABSTRACT

Centennial oscillations of the ocean thermohaline circulation are studied in a 2-D latitude-depth model under mixed boundary conditions (i.e. restoring surface temperature and prescribed freshwater flux). The oscillations are revealed through linear stability analysis of a steady state obtained in a single hemisphere configuration. A density variance budget is performed and helps determine the physical processes sustaining these oscillations: the restoring surface temperature appears as a source of density variance – this is a consequence of positively-correlated temperature and salinity anomalies. A minimal model, the Howard-Malkus loop oscillator, enables us to understand physically the oscillatory and growth mechanisms. The centennial oscillation is connected to the advection of salinity anomaly around the loop; it is also related to the salinity feedback on the overturning which reinforces anomalies through a change of residence time in the freshwater flux regions. Analytical solutions of this loop model show that these centennial oscillations exist in a specific parameter regime in terms of the freshwater flux amplitude F_0 : oscillations are damped if F_0 is too weak, but if F_0 is too large, the instability grows exponentially without oscillating – the latter regime is known as the positive salinity feedback. The robustness of these oscillations is then analyzed in more realistic bihemispheric configurations, some including a highly idealized Antarctic Circumpolar Current: oscillations are then always damped. These results are rationalized with the loop model, and compared to the oscillations found in general circulation models.

1. Introduction

Centennial scale variability is ubiquitous both in historical records of temperature and proxy data from sediments and ice cores – see for instance a recent review by Jones and Mann (2004). As the slow component of the Earth climate system, the ocean circulation is a potential candidate for the generation of oscillations on such long-time scales. Given the predominant centennial signal in the North Atlantic Ocean, Stocker and Mysak (1992) suggested a possible connection with the thermohaline circulation. Here we extend this idea through an analysis of ocean circulation stability in a hierarchy of simplified one- and two-dimensional (1- and 2-D) models, using linear stability analysis and density variance budgets in order to better understand the mechanism of oscillation.

1. Laboratoire de Physique des Océans (UMR 6523 CNRS IFREMER UBO), Université de Bretagne Occidentale, UFR Sciences, 6 Avenue Le Gorgeu, CS 93837, 29238 Brest Cedex 3, France.

2. Corresponding author. *email: florian.sevellec@univ-brest.fr*

Centennial scale variability is found in ocean general circulation models forced by various surface boundary conditions, stochastic forcing included (Mikolajewicz and Maier-Reimer, 1990). In a more idealized single-hemisphere flat-bottom geometry, Winton and Sarachik (1993) used both 3-D and 2-D models to investigate the oscillations mechanism and suggested the use of the simple Howard-Malkus loop oscillator as prototype. Mysak *et al.* (1993) described these centennial oscillations in a double-hemisphere 2-D model forced by mixed boundary conditions and addition of a stochastic freshwater flux. Similar oscillations also appear in box-models and rely on the strength of the freshwater flux under mixed boundary conditions (Tziperman *et al.*, 1994).

The bifurcation structure of such 2-D thermohaline circulations has been widely investigated (Quon and Ghil, 1995; Dijkstra and Molemaker, 1997). In a double-hemisphere basin symmetrically-forced by prescribed SST and freshwater flux, the symmetry breaking of both thermally- and salinity-driven double-cell flows results from asymmetric salt transports. Depending on the freshwater shape, Hopf bifurcation may occur and lead to limit cycle with periods of about the overturning time scale, where the salinity perturbations mainly drive the oscillatory flow.

For oscillations occurring around a steady state, linear stability analysis is a classical and powerful tool to get insight into the transitions to variability and their mechanism. Huck and Vallis (2001) used an empirical linearization in 3-D ocean models to study the interdecadal ocean variability under constant surface heat flux. To extend this study Te Raa and Dijkstra (2002) used a proper continuation method together with linear stability analysis, and confirmed a “generalized” large-scale baroclinic instability mechanism in agreement with a suggestion by Colin de Verdière and Huck (1999).

Te Raa and Dijkstra (2003) also investigated the mechanism of centennial oscillations, using linear stability analysis and continuation methods in 3-D and 2-D models. They related 3-D oscillations with centennial periods to 2-D oscillations with millennial scales (maybe because the mean overturning is then reduced from 20 to 5 Sv). They also found, from mean advection processes, that oscillations with active salinity, but uniform mean background salinity field, were quite similar to the ones with no salinity despite a reduced damping and a longer period. The focus here will be on a case with active salinity and a prescribed freshwater flux that sets up a nonuniform mean salinity field. By extending the linear stability analysis to a global model, Weijer and Dijkstra (2003) found a damped global mode of millennial period. It is worth noting that these studies were all conducted with a rather large horizontal viscosity responsible for an elevation of the damping rate, even though this increase was limited for the large-scale mode.

The long history in oceanography of the Howard-Malkus loop oscillator proposed as a prototype for centennial oscillations is likely dated back to the U-shaped thermal oscillator discussed by Welander (1957). Its geometry has been adapted to resemble the oceanic thermohaline circulation; it seems that the seminal loop oscillator was initially designed during Welander’s stay at WHOI (Welander, 1965; Keller, 1966; Welander, 1967). The

original Howard-Malkus model dates from the GFD summer school held at Woods Hole in 1971 (Howard, 1971), and the model has also been applied to the turbulence of the thermohaline circulation “à la Lorenz” (Malkus, 1972).

Two decades later, Dewar and Huang (1996) and Huang and Dewar (1996) investigated the stability of the salinity-driven circulation with respect to different formulations of surface fluxes, i.e. natural boundary conditions as introduced by Huang (1993), virtual salt flux and restoring boundary conditions, applied to a weakly frictional loop model. As for us, we expect the ocean circulation to be strongly damped on centennial time scales (Dewar and Huang, 1995) and to be primarily thermally-driven.

The present study was aimed at constituting part of a systematic description of several types of oscillations occurring in ocean models and made with similar objective methods (linear stability analysis, density variance budget, reduced order models). Arzel (2004) and Arzel *et al.* (2006) provided the first trial of this methodology by differentiating two types of interdecadal thermohaline oscillations in 3-D ocean models; indeed, some of them were identified as related to intrinsic ocean large-scale baroclinic instability, the other to mixed surface boundary conditions. This systematic approach should enable us to unambiguously determine the nature of oscillations occurring in more realistic and/or coupled models. Here, the same methodology is applied to the centennial oscillations of the thermohaline circulation under mixed boundary conditions in a 2-D ocean model and a loop model.

The paper is organized as follows: The 2-D ocean model is described in Section 2. Section 3 deals with the numerical experiments carried out in a single-hemisphere configuration where centennial oscillations can develop; it also describes the linear stability analysis and shows its ability to accurately provide the oscillation periods and damping/growth rates. The physical processes implied in the oscillations are identified through a detailed density variance budget. These qualify the Howard-Malkus loop model as a minimal system for reproducing the oscillations (Section 4): nonlinear integrations and analytical linear stability analysis provide some more insight in the physical mechanism of the oscillations. The robustness of the centennial oscillations is then tested in a bihemispheric pole-to-pole configuration, with and without an idealized Antarctic Circumpolar Channel (Section 5). Conclusions are drawn in Section 6.

2. The ocean model

For time scales much longer than the adjustment time of an ocean basin, which is of order of decades given baroclinic Rossby wave speed at midlatitudes, the ocean dynamics is in balance with the density field even in zonal average. For the centennial timescales of interest here, a zonally-averaged 2-D model of the ocean circulation, where a single overturning streamfunction is sufficient to capture the dynamics, is clearly appropriate (Winton and Sarachik, 1993; Te Raa and Dijkstra, 2003). The model equations and forcing are described hereafter.

a. Model equations

The latitude-depth 2-D model is based on the 3-D planetary geostrophic equations in Cartesian coordinates with a linearized equation of state for the seawater:

$$f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho_0} - \frac{\rho g \mathbf{k}}{\rho_0} + \mathcal{D}, \quad (1)$$

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)], \quad (2)$$

where $\mathbf{k}$ is the unit vector pointing upward, f is the Coriolis parameter, $\mathbf{u}$ is the velocity, P is the pressure, $\mathcal{D}$ is the friction term which will be discussed later, ρ (ρ_0) is the (reference) density, α is the thermal expansion coefficient, T (T_0) is the (reference) temperature, β is the haline contraction coefficient, and S (S_0) is the (reference) salinity.

The thermodynamic equations are the same as in the primitive equations and are readily transformed in two dimensions as follows:

$$\partial_t T = -J(\psi, T) + K_H \partial_y^2 T + K_V \partial_z^2 T + \mathcal{F}_T + \mathcal{C}_T, \quad (3a)$$

$$\partial_t S = -J(\psi, S) + K_H \partial_y^2 S + K_V \partial_z^2 S + \mathcal{F}_S + \mathcal{C}_S, \quad (3b)$$

where y is the latitude (in km), z is the vertical coordinate, T is the temperature, S is the salinity, J is the Jacobian operator, ψ is the overturning streamfunction defined as $\bar{w} = \partial_y \psi$ and $\bar{v} = -\partial_z \psi$ (where the overbar denotes the zonal average), K_H (K_V) is the horizontal (vertical) eddy diffusivity, $\mathcal{F}$ is the forcing term and $\mathcal{C}$ is the convection term. Convection sets in if $\partial_z \rho > 0$ and instantaneously mixes T and S downward (while conserving total heat and salt content) until a stable profile is achieved.

In a 2-D model, zonal averaging requires some dynamical approximations (Wright *et al.*, 1995, 1998). Marotzke *et al.* (1988) used Fickian vertical eddy viscosity for the friction term ($A \partial_z^2 \mathbf{u}$), but with an enhanced vertical viscosity, A^* , based on the hypothesis that the overturning is proportional to the nonrotating approximation one. Wright and Stocker (1991) set the east-west pressure difference proportional to the meridional gradient of zonally-averaged pressure and used a vertical eddy viscosity for the friction term. Application of the same method together with the replacement of vertical eddy viscosity with a linear friction provided us with a much simpler system (especially for the linearization):

$$\frac{1}{\rho_0} \partial_y \bar{P} = -\varepsilon \bar{v}, \quad (4)$$

where $\varepsilon = 1.45 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ was such that the obtained overturning is reasonable for a typical North Atlantic thermohaline stratification. This solution corresponds to a very frictional system where the meridional momentum dynamical balance is between the pressure gradient and the linear friction, like in the box model by Stommel (1961). The final equations are identical to the nonrotating 2-D equations of Marotzke *et al.* (1988), where the Fickian eddy viscosity is replaced with linear friction, and requires largely enhanced coefficients as well.

Table 1. Parameters used for the 2-D model integrations.

n_y	30	number of gridpoints in latitude
n_z	15	number of gridpoints on the vertical
H	4500 m	ocean uniform depth
W	4000 km	zonal basin extent
y_0	0 km	southern boundary position
y_1	6000 km	northern boundary position
K_H	$10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	horizontal tracer diffusion
K_V	$10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	vertical tracer diffusion
g	$9.8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	gravity acceleration
f	10^{-4} s^{-1}	Coriolis parameter
ρ_0	1027 kg m^{-3}	reference density
α	$2.2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	thermal expansion coefficient
β	$7.7 \times 10^{-4} \text{ psu}^{-1}$	haline contraction coefficient
τ_T	$1.75 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$	temperature restoring time
ε	$1.45 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	linear friction coefficient

These equations are solved by using a finite difference formulation (Table 1), on a uniform latitudinal grid but nonuniform vertical grid (15 levels of thickness varying from 50 m at the surface to 550 m at the bottom). No-normal-flow conditions are used on the boundaries, resulting in zero streamfunction, and zero flux conditions are applied to temperature and salinity except at the surface.

We compared all these parametrization to a full 3-D planetary geostrophic model (Huck *et al.*, 1999b), under the same forcing, i.e. restoring boundary conditions for both temperature and salinity so as to get a steady state. The linear-friction solution used afterwards is not significantly different from those employed by others (Marotzke *et al.*, 1988; Wright and Stocker, 1991), and is in good agreement with the 3-D model about thermohaline stratification and maximum overturning depth around 1000 m.

b. Surface forcing

In the next sections, the surface boundary conditions for temperature and salinity will differ (“mixed boundary conditions”), to take into account the different feedbacks on surface heat and freshwater flux. Welander (1986) took different restoring time scales for temperature and salinity. On the other hand, Weaver *et al.* (1991) used a restoring condition for surface temperature but a constant flux boundary condition for salinity; regarding variability, they concluded that the constant freshwater forcing permits decadal to centennial oscillations. Hence we follow here the latter, i.e. using constant freshwater forcing. The surface forcing is then expressed as:

$$\mathcal{F}_T = \tau_T [T^*(y) - \text{SST}(y)], \quad (5)$$

$$\mathcal{F}_S = \frac{S_0}{h} FW, \quad (6)$$

where SST is the sea-surface temperature (uppermost model level of thickness $h = 50$ m); the restoring surface temperature and the freshwater flux read:

$$T^*(y) = 13.5 [1 + \cos(\pi(y - y_0)/(y_1 - y_0))], \quad (7)$$

$$FW(y) = -F_0 \sin [2\pi(y - y_0)/(y_1 - y_0)]. \quad (8)$$

The main parameter for the following experiments is F_0 ; it corresponds to half of the precipitation–evaporation amplitude.

Given the positive salinity feedback on the thermohaline overturning (Marotzke, 1996), the freshwater flux forcing likely plays a key-role in the variability through increasing the meridional salinity gradient. This feedback is crucial to counterbalance the negative temperature feedback and enable the growth of an oscillatory regime.

3. Single hemisphere configuration

a. Nonlinear integrations with and without convection

This section will deal with two different experiments carried out with and without convection in order to investigate the effect of convective mixing, a very non-differentiable process, on 2-D ocean model internal variability. Different values of the freshwater forcing amplitude are determined in both cases to obtain centennial scale variability, but also to avoid millennial scale oscillations. Figure 1 shows that the two time-mean states are very similar, despite the slightly more intense overturning with no convection. Zhang *et al.* (1992) as well as Marotzke and Scott (1999) have both suggested that convective adjustment does not matter as crucially for a realistic thermohaline structure in 2-D as in 3-D since its effect remains efficiently represented through downwelling. Our two experiments show centennial variability, although it is only transient as a damped oscillation with convection, but perpetually sustained without. The effect of convection, like mixing in general, is to reduce the density gradients which are necessary to propagate the anomalies: convection mixes down any positive density anomalies on very short time scales. It is thus a sink of potential energy. However in our study aimed at understanding the variability mechanism, we will analyze both experiments with and without convection, the latter being more convenient to perform a linear stability analysis: it is likely that a qualitative study carried out with no convection would clarify the instability mechanism at the origin of oscillations growth.

The period of oscillation is deduced from the results of our nonlinear experiments, and thus the growth/damping rate ensues from the transient build-up and decay of the oscillatory regime. The convection experiment gave us a 171-yr oscillation and a 507-yr decaying time scale (Fig. 2). For the experiment without convection we find a 171-yr (coincidentally!) oscillation and a 201-yr growing time scale (Table 2). Most importantly, the density anomalies seem to be passively advected along the overturning streamlines (see Figs. 3a and 5 below).

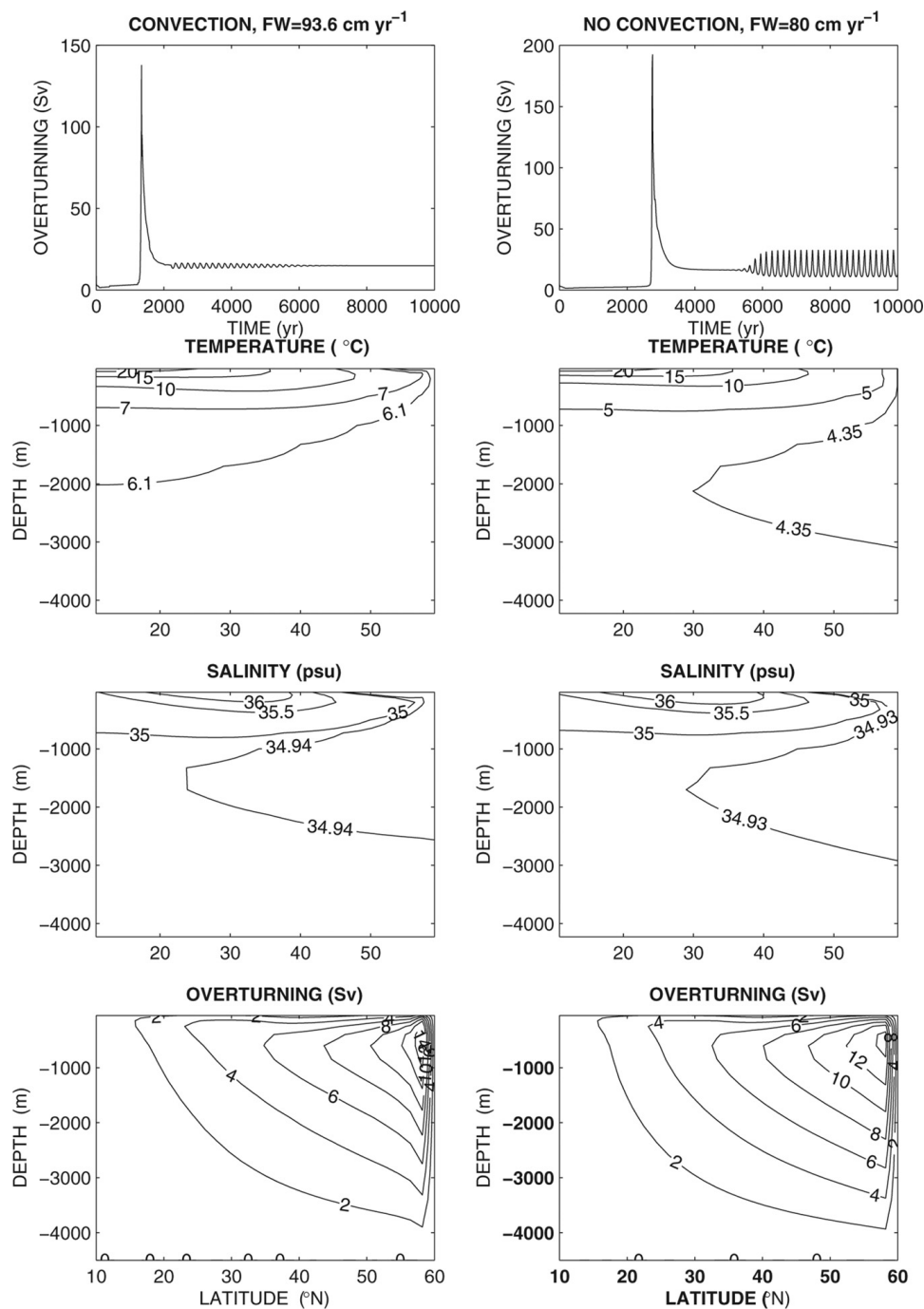


Figure 1. Two experiments with centennial variability (171 yr period for both): (left column) with convection and $FW = 93.6 \text{ cm yr}^{-1}$; (right column) with no convection and $FW = 80 \text{ cm yr}^{-1}$. Timeseries of the overturning streamfunction maximum; temperature, salinity and overturning averaged over the last 171 yr. The oscillations are damped in the first case, and perpetual in the second one (saturation at finite amplitude).

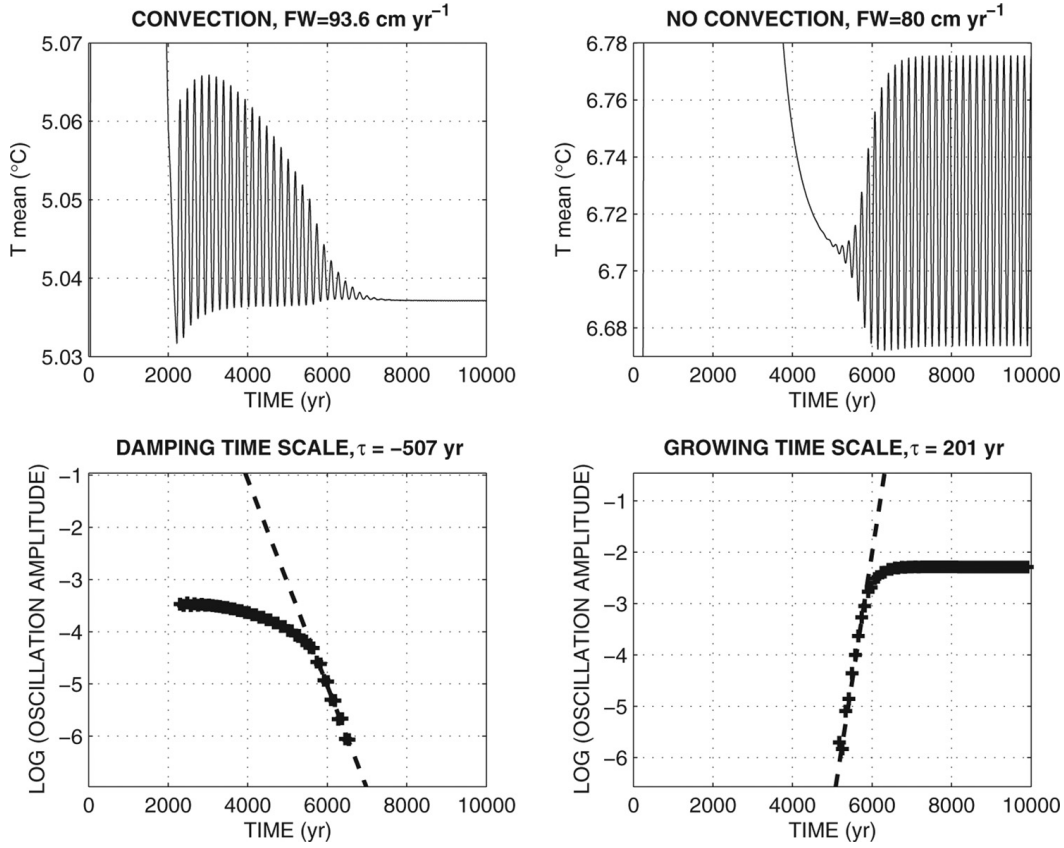


Figure 2. Time series of mean basin temperature (°C) for the two-dimensional model with convection and $FW = 93.6 \text{ cm yr}^{-1}$ (top left), and without convection and $FW = 80 \text{ cm yr}^{-1}$ (top right). Bottom figures show the evolution of the log of the oscillations amplitude (defined as the difference between two consecutive extremas) as a function of time, and highlight the linear behavior of the oscillations growth/decay. The damping/growing time scale is found through linear regression in the linear phase of growth/decay of oscillations.

b. Linear stability analysis

The principle of linear stability analysis is to examine the evolution of a small perturbation near a steady state. The prognostic equations of our model (3) can be written as a general dynamical system:

$$\partial_t X = \mathbf{A}(X), \quad (9)$$

where $\mathbf{A}$ is a nonlinear operator and $X = (T, S)$ is the state vector. Let $\bar{X}$ be a steady state, i.e. $\mathbf{A}(\bar{X}) = 0$, the system can be written for the perturbation $X' = X - \bar{X}$, and linearized:

$$\partial_t X' = \mathbf{M}X', \mathbf{M} = \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial X} \right|_{\bar{X}}, \quad (10)$$

where the Jacobian matrix, $\mathbf{M}$, is a function of $\bar{X}$ only (autonomous system).

2006] *Sévellec et al.: Mechanism of centennial thermohaline oscillations* 363

Table 2. Period and growth time scale obtained from time integration (nonlinear) and predicted by the linear stability analysis (linear) of the centennial modes. These values are done for all experiments (one and two hemispheres, with and without convection/ACC) for the 2-D latitude-depth model and the Howard-Malkus loop.

One Hemisphere	2D with conv.		2D with no conv.		Howard-Malkus loop	
	nonlinear	linear	nonlinear	linear	nonlinear	linear
Period (yr)	171	424	171	162	170	167
Growth (yr)	−507	−208	201	186	454	476
Two Hemispheres	2D model (linear)			Howard-Malkus loop		
	without ACC		with ACC	nonlinear	linear	
Period (yr)	733		750	605	502	
Growth (yr)	−67		−129	−908	∞	

A general problem for such linear stability analysis is the choice of the steady state, and that is why continuation techniques are so interesting: sometimes a steady state is readily available upon a switch of surface boundary conditions for instance (Huck and Vallis, 2001); it may also be possible, although not rigorously correct, to use the time-average of the model state over a full oscillation. In the case with convection we use the steady state reached after the decline of the oscillations near year 7000. For the case without convection, we have used the unstable steady state closest to the time-mean state over an oscillation period: we found it through an iterative solver for the zeros of the nonlinear system consisting in the time-derivatives of each gridpoint temperature and salinity (function 'fsolve' in matlab, using trust-region dogleg method), and initialized from the time-averaged temperature and salinity fields over an oscillation period.

The Jacobian matrix was calculated with two different methods; the empirical and versatile numerical method used in Huck and Vallis (2001) was found to be valid with and without convection; on the other hand, the rigorous analytical linearization of Eqs. (3) can be done only in the no-convection case. It is worth underlining that both methods gave identical results with no convection. Once the Jacobian matrix is computed for each steady state, an eigenanalysis is performed, and the oscillatory eigenmodes with largest real part are analyzed: in each case, it is a centennial scale oscillation. It is then compared to the (transient) oscillations appearing in direct integration of the nonlinear model.

In the two experiments carried out in this study, the similarities in spatial structure and time evolution are very strong between the oscillation present in the direct integration and the one issued from the most unstable linear mode. Both cases show a dipole of density anomaly is advected around the overturning circulation (Figs. 3 and 4). A phase diagram of salinity anomalies along a closed overturning streamfunction contour even shows a slow-down of the anomalies in the evaporation region, followed by a speedup in the precipitation region (Fig. 5). Furthermore, in the experiment with no convection, the oscillation period and the growth rate are very similar for the linear mode and the nonlinear model integration. However, the linear stability analysis does not provide a good quantitative estimate

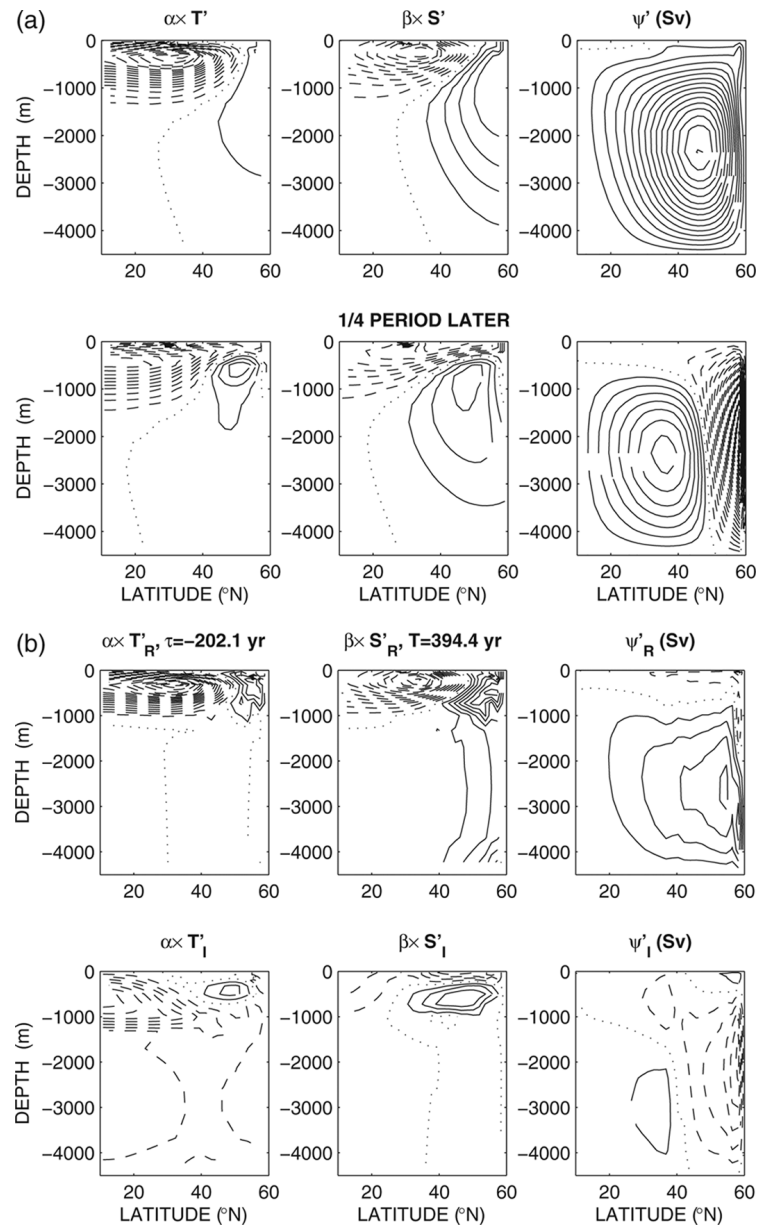


Figure 3. (a) Nonlinear model damped oscillation vs. (b) linear eigenmode (the nonlinear model year is chosen to optimize the correlation with the linear eigenvector, and the eigenvector amplitude is adjusted to give the same density variance as the nonlinear oscillation), in terms of temperature, salinity (both scaled in terms of density), and overturning anomalies, for the experiment with convection ($FW = 93.6 \text{ cm yr}^{-1}$). (a) Snapshots are given at year 3112 and a quarter-period later. The solid, dashed and dotted lines respectively correspond to positive, negative and zero anomalies; contour interval is 2.5×10^{-6} or 0.1 Sv. (b) For the damped linear eigenmode, real and imaginary parts are provided; they evolve as: $X_R \rightarrow X_I \rightarrow -X_R \rightarrow -X_I \rightarrow X_R$, with $X = \{T', S', \psi'\}$. Spatial structure and time evolution are similar, but period (growth time scale) greatly differs: 171 (–507) vs. 424 (–208) yr.

2006]

Sévellec et al.: Mechanism of centennial thermohaline oscillations

365

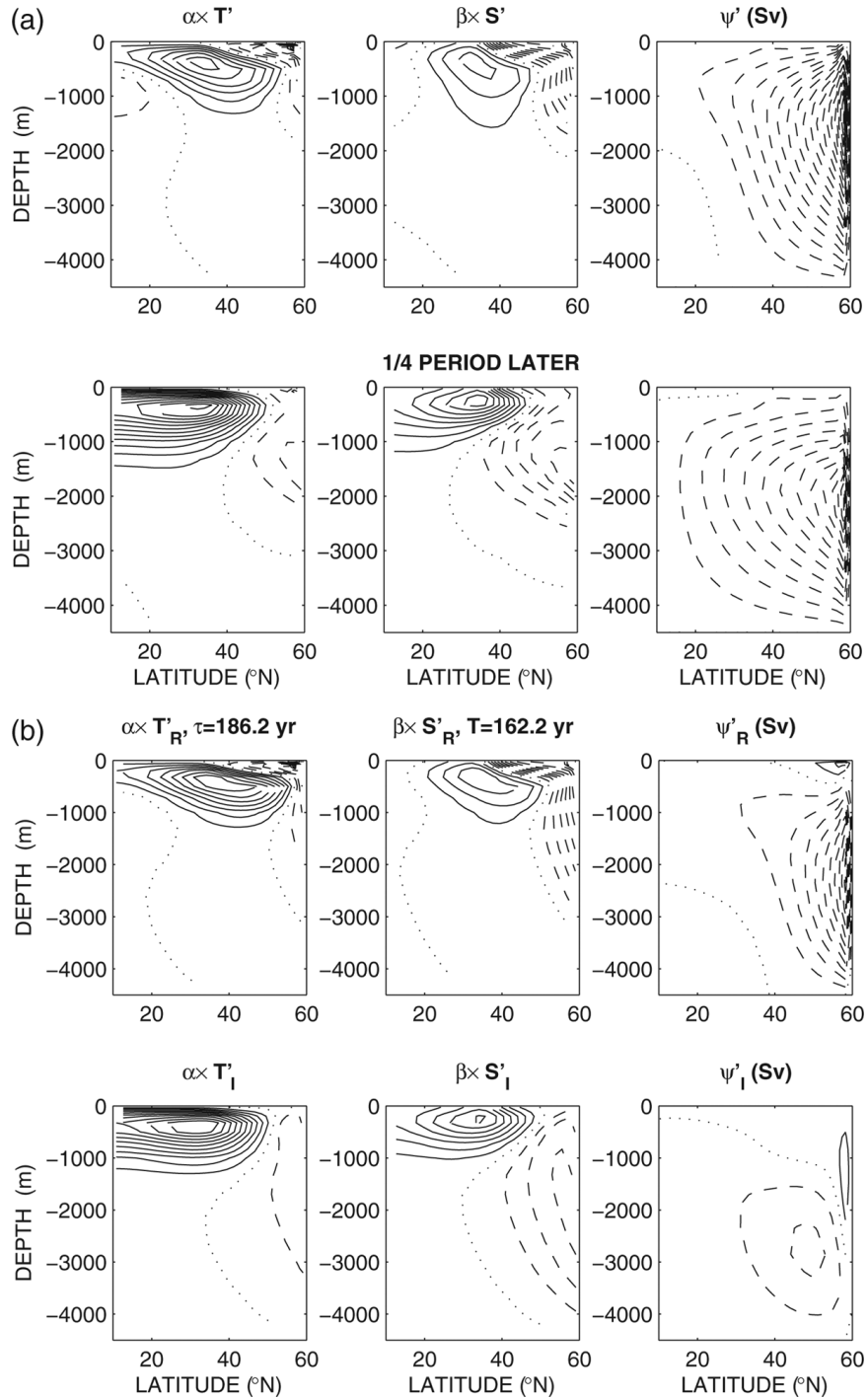


Figure 4. As in Figure 3 for the experiment with no convection ($FW = 80 \text{ cm yr}^{-1}$): here year 9452 and a quarter-period later are shown for the sustained nonlinear oscillation, and the associated linear eigenmode is unstable; contour interval is 10^{-5} or 0.5 Sv. Note the high similarity of spatial structures and period (growing time scale): 171 (201) vs. 162 (186) yr.

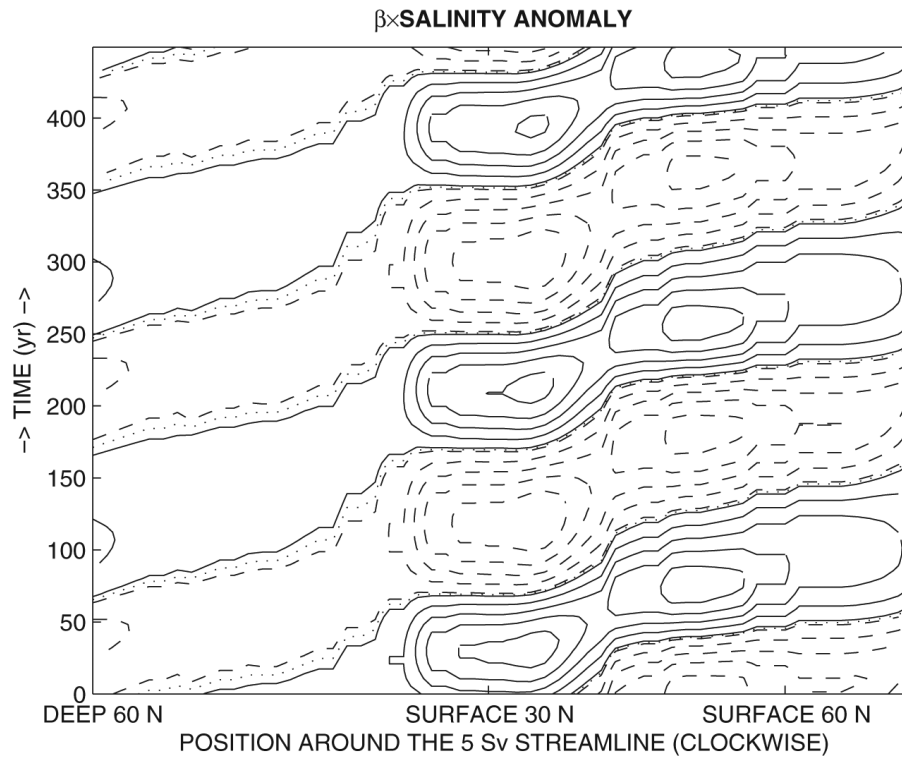


Figure 5. Hovmöller diagram of the salinity anomaly ($\times\beta$) along the 5-Sv mean streamfunction contour for the experiment with no convection (Fig. 1). The solid, dashed and dotted lines respectively correspond to positive, negative and zero anomalies. The contour interval is from 0.1 to ∞ by 6.1×10^{-2} for the positive values, and from -0.1 to $-\infty$ by -6.1×10^{-2} for the negative ones.

in the convective case (Table 2). Convection being the only nondifferentiable term, its effect on the nonlinear evolution of the perturbations is poorly assessed with this empirical linearization.

c. Density variance budget

In order to gain insight into the physical processes at the origin of oscillating perturbations, we focused on the variance budget for temperature and salinity investigated through their influence on density. Hence, further estimating the density variance budget as a simple proxy for available potential energy (Lorenz, 1955) helps in the determination of physical mechanism and spatial localization of variance sources and sinks (Arzel, 2004; Arzel *et al.*, 2006). So, in this section let us note the time average:

$$\bar{X} = \frac{1}{P} \int_0^P X dt, \quad (11)$$

2006] Sévellec et al.: Mechanism of centennial thermohaline oscillations 367

where $\mathcal{P}$ is the oscillation period, and the anomaly is $X' = X - \bar{X}$. The domain average is then expressed as:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{H(y_1 - y_0)} \int_{-H}^0 \int_{y_0}^{y_1} X dy dz, \quad (12)$$

where H is the total depth, y_0 and y_1 are the domain latitude boundaries.

In the anomaly we have $\rho' = \rho_0(-\alpha T' + \beta S')$, such that:

$$\left\langle \frac{1}{2} \overline{\partial_t \rho'^2} \right\rangle = \alpha^2 \rho_0^2 \left\langle \frac{1}{2} \overline{\partial_t T'^2} \right\rangle + \beta^2 \rho_0^2 \left\langle \frac{1}{2} \overline{\partial_t S'^2} \right\rangle - \alpha \beta \rho_0^2 \langle \overline{\partial_t (T' S')} \rangle. \quad (13)$$

The density variance budget is developed hereafter from Eqs. (3) and under the following conditions: no convection, D encompasses the horizontal and vertical eddy diffusion terms, and F is the surface forcing, with the indices T and S for temperature and salinity, respectively:

$$\left\langle \frac{1}{2} \overline{\partial_t T'^2} \right\rangle = -\langle \overline{T' J(\bar{\psi}, T')} \rangle - \langle \overline{T' J(\psi', \bar{T})} \rangle + \langle \overline{D'_T T'} \rangle + \langle \overline{F'_T T'} \rangle, \quad (14a)$$

$$\langle \overline{\partial_t (T' S')} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \overline{\partial_t S'^2} \right\rangle = -\langle \overline{S' J(\bar{\psi}, S')} \rangle - \langle \overline{S' J(\psi', \bar{S})} \rangle + \langle \overline{D'_S S'} \rangle + \langle \overline{F'_S S'} \rangle, \quad (14b)$$

$$+ \langle \overline{D'_T S'} \rangle + \langle \overline{D'_S T'} \rangle + \langle \overline{F'_T S'} \rangle + \langle \overline{F'_S T'} \rangle. \quad (14c)$$

Some simplifications arise from the lateral boundary conditions of zero mass, heat and salinity flux:

$$\begin{aligned} \langle \overline{T' J(\bar{\psi}, T')} \rangle &= 0, \\ \langle \overline{S' J(\bar{\psi}, S')} \rangle &= 0, \\ \langle \overline{T' J(\bar{\psi}, S')} \rangle + \langle \overline{S' J(\bar{\psi}, T')} \rangle &= 0, \\ \langle \overline{D'_T S'} \rangle &= \langle \overline{D'_S T'} \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

The last peculiarity of our variance equation derives from the constant freshwater flux:

$$\langle \overline{F'_S S'} \rangle = \langle \overline{F'_T T'} \rangle = 0. \quad (16)$$

We finally end up with the following simplified density variance budget:

$$\begin{aligned} \rho_0^{-2} \left\langle \frac{1}{2} \overline{\partial_t \rho'^2} \right\rangle &= -\alpha^2 \langle \overline{T' J(\psi', \bar{T})} \rangle - \beta^2 \langle \overline{S' J(\psi', \bar{S})} \rangle + \alpha \beta \langle \overline{T' J(\psi', \bar{S})} \rangle \\ &\quad + \alpha \beta \langle \overline{S' J(\psi', \bar{T})} \rangle + \alpha^2 \langle \overline{D'_T T'} \rangle + \beta^2 \langle \overline{D'_S S'} \rangle \\ &\quad - \alpha \beta \langle \overline{D'_T S'} \rangle - \alpha \beta \langle \overline{D'_S T'} \rangle + \alpha^2 \langle \overline{F'_T T'} \rangle - \alpha \beta \langle \overline{F'_T S'} \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

368

Journal of Marine Research

[64, 3

Table 3. Notations for the advection, diffusion and forcing terms in the density variance budget. These terms are easily adapted to the 1-D loop model.

Advection	Diffusion	Forcing
$\text{Adv}(T', \bar{T}) = \frac{-\alpha^2 \langle T' J(\psi', \bar{T}) \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$	$\text{Diff}(T', T') = \frac{\alpha^2 \langle D_T' T' \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$	$\text{Forc}(T', T') = \frac{\alpha^2 \langle F_T' T' \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$
$\text{Adv}(S', \bar{S}) = \frac{-\beta^2 \langle S' J(\psi', \bar{S}) \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$	$\text{Diff}(S', S') = \frac{\beta^2 \langle D_S' S' \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$	$\text{Forc}(T', S') = \frac{-\alpha\beta \langle F_T' S' \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$
$\text{Adv}(T', \bar{S}) = \frac{\alpha\beta \langle T' J(\psi', \bar{S}) \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$	$\text{Diff}(T', S') = \frac{-\alpha\beta \langle D_T' S' \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$	$\text{TotForc} = \frac{-\alpha \langle F_T' \rho' \rangle}{\rho_0^{-1} \langle \rho'^2 \rangle}$
$\text{Adv}(S', \bar{T}) = \frac{\alpha\beta \langle S' J(\psi', \bar{T}) \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$	$\text{Diff}(S', T') = \frac{-\alpha\beta \langle D_S' T' \rangle}{\rho_0^{-2} \langle \rho'^2 \rangle}$	
$\text{TotAdv} = \frac{-\langle \rho' J(\psi', \bar{\rho}) \rangle}{\langle \rho'^2 \rangle}$	$\text{TotDiff} = \frac{\langle D_\rho' \rho' \rangle}{\langle \rho'^2 \rangle}$	$\text{Tot} = \frac{\langle \frac{1}{2} \partial_t \rho'^2 \rangle}{\langle \rho'^2 \rangle}$

Positive and negative contributions to the tendency in density variance can be diagnosed from the numerical solutions (Tables 3 and 4). We find a balance between the anomalous streamfunction advective terms, which thus have a reduced contribution on density variance. Diffusion being a variance sink, the only source is finally the restoring surface temperature term. Moreover the spatial distribution of the total variance term (Fig. 6) shows that, although the basin average is zero, density variance sources are localized in the upper layers (0 to 500 m), mainly in the subpolar region and more weakly in the subtropics. The sinks are more important around 35N at the surface, as well as within 150 and 500 m over all latitudes, and between 750 and 2500 m close to the polar boundary.

In the surface mixed layer (thickness h_m), the correlation coefficient between temperature and salinity anomalies is more than 0.7 for both the nonlinear integration and the linear eigenvector, it allows us write approximately that in the mixed layer $S' = rT'$. Then, the variance term associated with surface restoring temperature reads:

$$\begin{aligned}
 -\alpha\rho_0^{-1} \langle F_T' \rho' \rangle &= \alpha^2 \langle \bar{F}_T' T' \rangle - \alpha\beta \langle \bar{F}_T' S' \rangle \\
 &= \langle (-\alpha^2 \tau_T T'^2 + \alpha\beta \tau_T T' S') H(z + h_m) \rangle \\
 &= \langle (-\alpha^2 \tau_T T'^2 + \alpha\beta \tau_T r T'^2) H(z + h_m) \rangle \\
 &= \langle ((\beta r - \alpha) \alpha \tau_T T'^2) H(z + h_m) \rangle, \tag{18}
 \end{aligned}$$

where H is the Heaviside function. It clearly appears that this type of forcing becomes a source of variance when:

$$-\alpha\rho_0^{-1} \langle \bar{F}_T' \rho' \rangle > 0 \Rightarrow r > \frac{\alpha}{\beta}. \tag{19}$$

Table 4. Source (positive) and sink (negative) terms in the density variance budget (yr^{-1}) for the nonlinear model oscillation and for the linear eigenmode (whose phase is fitted to optimize the correlation with nonlinear model oscillation, and amplitude is adjusted to give the same density variance). The analysis is performed for the single hemispheric latitude-depth model (nonlinear case, corresponding to direct integration, and linear one, corresponding to the eigenmode of the linear stability analysis) and for the Howard-Malkus loop (with two different values of r_T).

One hemisphere:	Latitude-depth model		Howard-Malkus loop	
Variance term	nonlinear	linear	$r_T = 1 \text{ yr}^{-1}$	$r_T = 0.1 \text{ yr}^{-1}$
$\text{Adv}(T', \bar{T})$	0.148	−0.018	0.00076	0.00377
$\text{Adv}(S', \bar{S})$	0.0584	−0.003	0.00226	0.00198
$\text{Adv}(T', \bar{S})$	−0.062	0.007	−0.00003	−0.00033
$\text{Adv}(S', \bar{T})$	−0.144	0.017	−0.00052	−0.00488
TotAdv	0.000	0.004	0.00247	0.00054
$\text{Diff}(T', T')$	−0.123	−0.137	0.00000	−0.00008
$\text{Diff}(S', S')$	−0.059	−0.061	−0.00228	−0.00242
$\text{Diff}(T', S')$	0.056	0.063	0.00000	0.00010
$\text{Diff}(S', T')$	0.056	0.063	0.00000	0.00010
TotDiff	−0.070	−0.072	−0.00228	−0.00230
$\text{Forc}(T', T')$	−0.026	−0.029	−0.00076	−0.00371
$\text{Forc}(T', S')$	0.096	0.095	0.00066	0.00464
TotForc	0.070	0.065	−0.00010	0.00093
Tot	0.000	−0.003	0.00009	−0.00083

Table 5. Parameters used for the Howard-Malkus loop model.

α	$2.2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	thermal expansion coefficient
β	$7.7 \times 10^{-4} \text{ psu}^{-1}$	haline contraction coefficient
k	34.4 yr^{-1}	buoyancy torque/overtuning parameter
r_T	1 yr^{-1}	temperature restoring time
T_0	10 K	temperature forcing amplitude
h	1000 m	fluid thickness
S_0	35 psu	reference salinity
F_0	$80/101 \text{ cm yr}^{-1}$	freshwater flux intensity (1 hemisphere/2 hemisphere)
K_ϕ	$2.2 \times 10^{-3} \text{ yr}^{-1}$	tracer diffusion
$I^T(\phi)$	$-\sin(\phi)$	temperature forcing geometry in one-hemisphere
	$\cos(2\phi)\Pi\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$	temperature forcing geometry in two-hemisphere
$I^S(\phi)$	$-\sin(2\phi)\Pi\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$	salinity forcing geometry in one-hemisphere
	$\sin(4\phi)\left(\Pi\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] - \Pi\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$	salinity forcing geometry in two-hemisphere

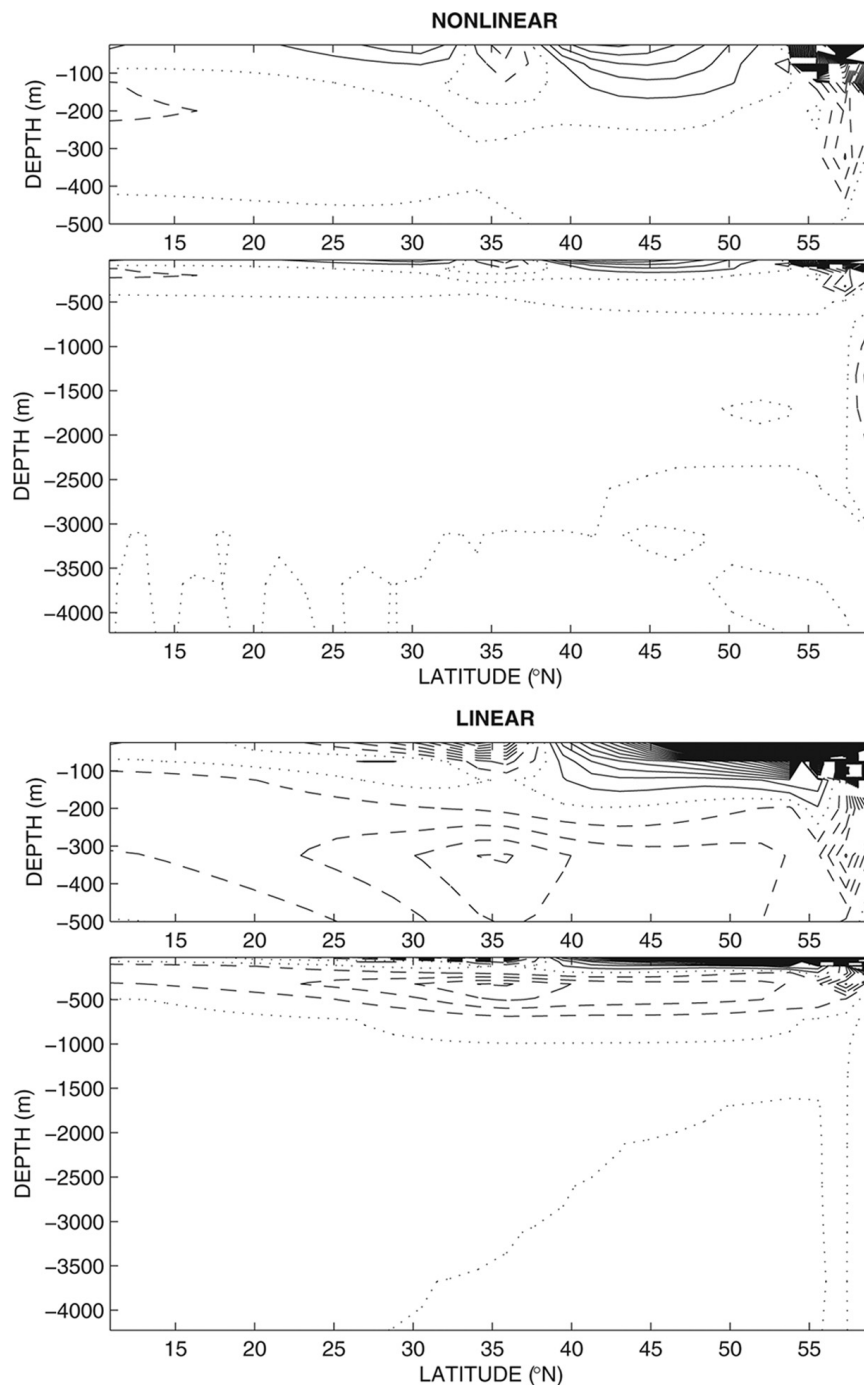


Figure 6. Spatial distribution of the total density variance term $\frac{1}{2} \overline{\partial_t \rho^2} / \langle \overline{\rho^2} \rangle$, for the nonlinear model integration with no convection, averaged over an oscillation period and for the associated linear oscillatory eigenmode. The solid, dashed and dotted lines respectively correspond to the positive, negative and zero variances, the contour interval is 0.2 yr⁻¹. Both nonlinear and linear modes give similar qualitative results.

A linear regression gives $r = 1.06 \text{ psu K}^{-1}$ for the nonlinear integration and $r = 0.91 \text{ psu K}^{-1}$ for the eigenvectors; these values should be compared to $\alpha/\beta = 0.29 \text{ psu K}^{-1}$. Thus the condition (19) is fulfilled and allows the surface temperature relaxation to generate density variance.

In conclusion, under mixed boundary conditions, the surface temperature restoring forcing provides a source of density variance sustaining the variability: this ensues from the good correlation between temperature and salinity anomalies at the surface during oscillations. When positive (negative) density anomalies consisting of positive (negative) anomalies of temperature and salinity are exposed to surface forcing, the relaxation to zero of the temperature anomaly induces the intensification of the density anomaly. It is worth noting that similar conclusions have been drawn about interdecadal oscillations under mixed boundary conditions (Arzel, 2004; Arzel *et al.*, 2006).

We are thus led to consider the cause of such positive correlations between temperature and salinity anomalies. Given the mean $\theta - S$ relationship in the ocean, and the correspondence between regions of warming (cooling) and evaporation (precipitation), variations in the circulation induce $T - S$ anomalies with positive correlations, just like the mean $T - S$ relationship. Alternatively, perturbation structures, whose density is dominated by salinity, but without such a good correlation between $T - S$ anomalies would not be able to draw energy from the surface forcing, and hence would not appear as weakly unstable or damped modes, but much further in the eigenvalue spectrum.

4. A minimal model: The Howard-Malkus loop oscillator

The 2-D model oscillation shows advection of temperature and salinity anomalies along contours of the mean overturning streamfunction (Fig. 5). To simplify the system further, it seems appropriate to model our basin as the Howard-Malkus loop (Malkus, 1972), a 1-D model of the overturning circulation. This widely studied oscillator (Welander, 1957, 1965; Keller, 1966; Welander, 1967, 1986; Winton and Sarachik, 1993; Dewar and Huang, 1995, 1996; Huang and Dewar, 1996) is composed of a fluid contained in a circular loop (Fig. 7). The uniform angular velocity ω is proportional to the buoyancy torque integrated around the loop (Maas, 1994) through a dynamical balance between the buoyancy forces and the friction as done in the Stommel (1961) box model. As shown above, we set mixed boundary conditions, i.e. prescribed freshwater (salinity) flux and temperature restoring (the forcing distribution along the loop is not necessarily restricted to the ‘surface’). The evolution equations for temperature and salinity in this fluid loop read:

$$\partial_t T + \omega \partial_\phi T = r_T [T_0 I^T(\phi) - T] + K_\phi \partial_\phi^2 T, \quad (20a)$$

$$\partial_t S + \omega \partial_\phi S = -\frac{F_0 S_0}{h} I^S(\phi) + K_\phi \partial_\phi^2 S, \quad (20b)$$

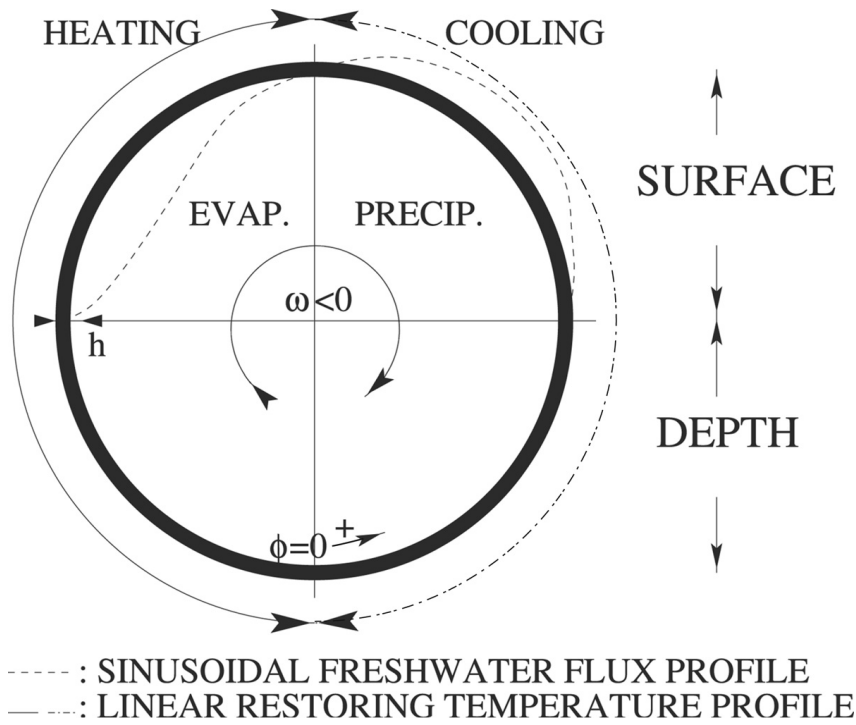


Figure 7. Schematic of the Howard-Malkus loop oscillator along with the temperature and freshwater (dashed) forcing profiles used here.

where ω is the overturning pulsation and is given by

$$\omega = -k \int_0^{2\pi} (-\alpha T + \beta S) \sin \phi d\phi, \quad (21)$$

where T is the temperature, S is the salinity, α is the thermal expansion coefficient, β is the haline contraction coefficient, ϕ is the counterclockwise angle around the loop measured from the bottom, F_0 is the freshwater flux intensity, S_0 is the reference salinity, h is the fluid thickness, r_T is the relaxation coefficient for temperature (inverse of the restoring time), T_0 is the amplitude of the temperature forcing, $I^{\{T,S\}}$ is the temperature and salinity forcing geometry, and K_ϕ is a Laplacian eddy diffusion used for the numerical integration only. The proportionality factor k between the overturning and the buoyancy torque is such that it gives a realistic overturning value for typical temperature and salinity contrasts. One should note the lack of convection, here, resulting from the absence of difference between horizontal and vertical processes.

a. Nonlinear integrations and density variance budget

First we verify that the Malkus loop oscillator is a valid approximation to represent our 2-D oscillation. The numerical integration of the Malkus loop equations with the parameters

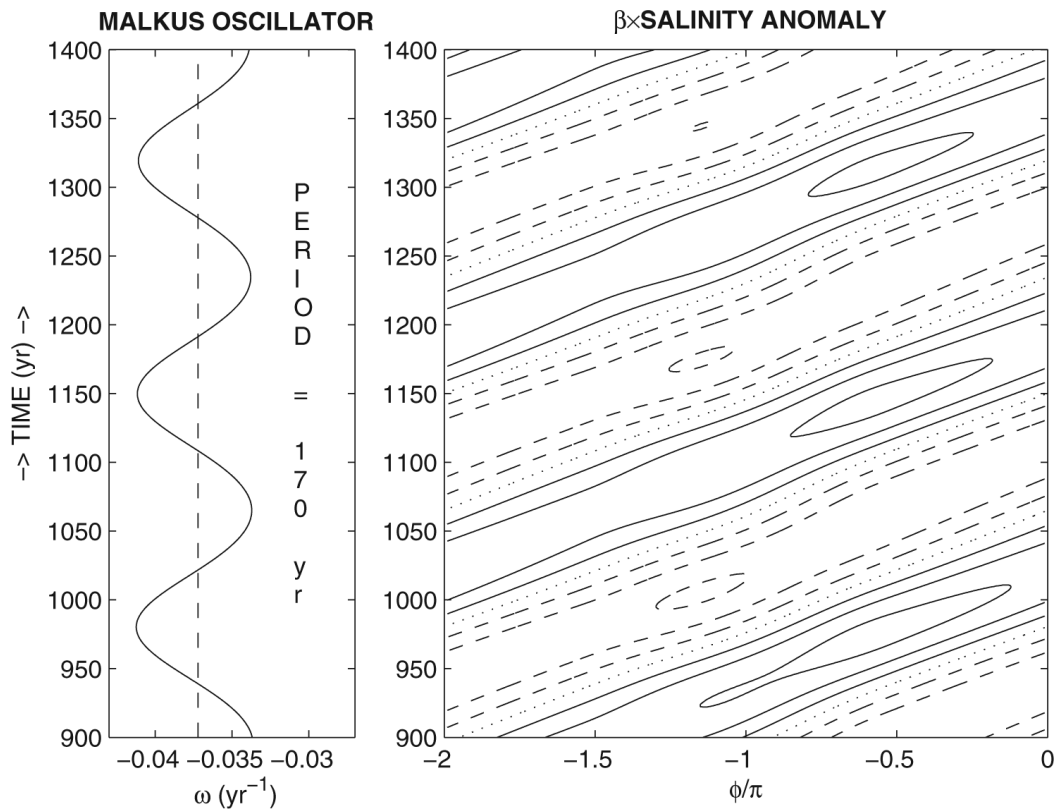


Figure 8. Numerical integration of the nonlinear Malkus loop oscillator leading to perpetual oscillations. (left) Overturning as a function of time. (right) Hovmöller diagram of the salinity anomaly ($\times \beta$). The solid, dashed and dotted lines respectively correspond to positive, negative and zero anomalies, the contour interval is 0.75×10^{-4} . The oscillation period is 170 yr for an advective period $2\pi/\bar{\omega} = 169$ yr and the propagation is governed by the advection of the mean overturning circulation.

given in Table 5 settles into perpetual oscillations (note the small diffusion term added for numerical stability). The friction parameter k was adjusted in order to get a mean overturning period ($2\pi/\bar{\omega}$, where $\bar{\omega}$ is the time-averaged ω) equal to the renewal time of the water from the two-dimensional model (basin volume/maximum overturning ~ 171 yr).

In the nonlinear integration with perpetual oscillations, the diffusion and nonlinear term finally balance the initial (linear) growth of the perturbation. The oscillation period (Fig. 8) is 170 yr vs. 171 yr in the 2-D model, as a consequence of the choice for parameter k . Salinity anomalies clearly propagate at the angular velocity of the time-averaged overturning (Fig. 8 to be compared to Fig. 5 for the 2-D model). Temperature (salinity) anomalies are about 0.09°C (0.70 psu), and thus density anomalies are dominated by salinity. These two results suggest that oscillations in the 2-D model and the Malkus loop oscillator are governed by the same physical processes (in the next section we will provide a quasi-analytical stability analysis of the loop oscillator in order to characterize the oscillation mechanism).

In order to compare the oscillations in this very simple model to those in the 2-D one, a similar density variance budget is performed (Table 4). It shows that, for standard coefficients, there is no need to have a positive surface temperature relaxation term for sustaining the oscillations. Hence, the surface relaxation may not be fundamental to the oscillatory mechanism. In fact, here, the contribution by the advective terms to the variance budget is positive.

A second simulation conducted with a reduced relaxation coefficient ($r_T = 0.1 \text{ yr}^{-1}$) allowed us to explore a parameter regime more similar to the one used in the 2-D experiments: indeed the density variance terms now compare much better to the 2-D case, with a positive contribution of surface temperature relaxation.

From these two simulations, the density variance budget suggests that, at least for the Howard Malkus loop, the fundamental contributor to the growth of the centennial oscillation is not the surface relaxation. However, the temperature relaxation remains a necessary element for this growth: indeed, we performed the same simulations with prescribed heat fluxes diagnosed as the time-averaged temperature restoring term over one oscillation period, and observed as expected the decay of oscillations. The growth of oscillations occurs only on condition (i) that the density be affected by both temperature and salinity and (ii) that the restoring time scale associated to T and S be different; thus, the mean circulation is controlled by the more rapidly relaxed variable (temperature here) whereas the oscillations rely on the more ‘free’ variable (salinity) that is not restored.

b. Linear stability analysis

The periodicity of the Malkus loop suggests that the spectrum of the solutions is discontinuous in terms of ϕ and allows the following decomposition:

$$X(t) = \Re \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(t) e^{in\phi} \right],$$

where $\Re$ indicates the real part, with the reverse projection:

$$X_n = X_{rn} + iX_{in} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X e^{-in\phi} d\phi,$$

where X represents T or S . The inviscid Malkus oscillator equations can thus be rewritten as:

$$\partial_t S_{rn} - n\omega S_{in} = -\frac{F_0 S_0 I_{rn}^S}{h}, \quad (22a)$$

$$\partial_t S_{in} + n\omega S_{rn} = -\frac{F_0 S_0 I_{in}^S}{h}, \quad (22b)$$

$$\partial_t T_{rn} - n\omega T_{in} = r_T (T_0 I_{rn}^T - T_{rn}), \quad (22c)$$

$$\partial_t T_{in} + n\omega T_{rn} = r_T (T_0 I_{in}^T - T_{in}), \quad (22d)$$

2006] Sévellec et al.: Mechanism of centennial thermohaline oscillations 375

where the subscripts r and i respectively state for the real and imaginary parts and $I_n^{\{T,S\}}$ respectively represent the specific geometry of the temperature and salinity forcing:

$$I_n^{\{T,S\}} = I_{rn}^{\{T,S\}} + i I_{in}^{\{T,S\}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I^{\{T,S\}}(\phi) e^{-in\phi} d\phi.$$

It appears that ω depends only on the first harmonic in T and S :

$$\omega = -k\alpha T_{i1} + k\beta S_{i1}. \quad (23)$$

The steady state ($\partial_t \equiv 0$) reads in terms of ω :

$$\bar{S}_{rn} = -\frac{F_0 S_0 I_{in}^S}{n\bar{\omega}h}, \quad (24a)$$

$$\bar{S}_{in} = \frac{F_0 S_0 I_{rn}^S}{n\bar{\omega}h}, \quad (24b)$$

$$\bar{T}_{rn} = \frac{r_T^2 T_0 I_{rn}^T + n\bar{\omega} r_T T_0 I_{in}^T}{r_T^2 + n^2 \bar{\omega}^2}, \quad (24c)$$

$$\bar{T}_{in} = \frac{r_T^2 T_0 I_{in}^T - n\bar{\omega} r_T T_0 I_{rn}^T}{r_T^2 + n^2 \bar{\omega}^2}. \quad (24d)$$

Introducing these expressions in (23) gives a fourth-order equation for the steady-state overturning:

$$\bar{\omega}^4 + \left(r_T^2 - \frac{k\beta F_0 S_0 I_{r1}^S}{h} - k\alpha r_T T_0 I_{r1}^T \right) \bar{\omega}^2 + k\alpha r_T^2 T_0 I_{i1}^T \bar{\omega} - r_T^2 \frac{k\beta F_0 S_0 I_{r1}^S}{h} = 0. \quad (25)$$

The linear stability analysis around the steady state is performed using the standard notations:

$$\{T, S\}_{\{r,i\}n} = \{\bar{T}, \bar{S}\}_{\{r,i\}n} + \{T', S'\}_{\{r,i\}n},$$

where the overbar and the prime indicate the steady state value and the perturbation, respectively. Linearization leads to:

$$\partial_t \begin{pmatrix} S'_{rn} \\ S'_{in} \\ T'_{rn} \\ T'_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n\bar{\omega} + nk\beta \bar{S}_{in} \delta_{1,n} & 0 & -nk\alpha \bar{S}_{in} \delta_{1,n} \\ -n\bar{\omega} & -nk\beta \bar{S}_{rn} \delta_{1,n} & 0 & nk\alpha \bar{S}_{rn} \delta_{1,n} \\ 0 & nk\beta \bar{T}_{in} \delta_{1,n} & -r_T & n\bar{\omega} - nk\alpha \bar{T}_{in} \delta_{1,n} \\ 0 & -nk\beta \bar{T}_{rn} \delta_{1,n} & -n\bar{\omega} & -r_T + nk\alpha \bar{T}_{rn} \delta_{1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_{rn} \\ S'_{in} \\ T'_{rn} \\ T'_{in} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

where δ is the Kronecker symbol. The diagonalization of the Jacobian matrix provides the eigenvectors and their associated eigenvalues.

Now, we will distinguish the case $n = 1$ from the one where $n \neq 1$ in our analysis. If $n \neq 1$ four complex eigenvalues are obtained:

$$\lambda_{n1\pm} = \pm in|\bar{\omega}|, \quad (27a)$$

$$\lambda_{n2\pm} = -r_T \pm in|\bar{\omega}|. \quad (27b)$$

They correspond to the subharmonics of ω ; one of them is a damped oscillation due to temperature restoring. The case where $n = 1$ is more interesting because the overturning anomalies are included. This is why focus, hereafter, will be on it; the index will be dropped accordingly for simplification of notations. It is worth recalling that the $n = 1$ projection completely describes the advection term ω .

Figure 9 shows the stability diagram as a function of the freshwater intensity F_0 , keeping the other values alike those given in Table 5. The steady state is unstable when $F_0 > 0$, and the most unstable eigenmode is oscillatory for $F_0 < 1470 \text{ cm yr}^{-1}$ for $1/r_T = 1 \text{ yr}$ (the fixed point is an unstable spiral). Above this threshold the fixed points become unstable nodes, but their unstable modes are not oscillatory. All the eigenvectors are more marked in salinity than in temperature, and thus the associated density anomaly ($\beta|S'_{\{r,i\}}| \gg \alpha|T'_{\{r,i\}}|$).

Negligible variations of temperature allow us to step further in the simplification process and to consider the overturning variations only controlled by salinity anomalies: the linear subsystem is then easily expressed analytically. Hereafter we will consider two cases according to the salinity conditions: (i) with a passive salinity (advected by a mean overturning), and (ii) with active salinity and passive temperature.

i. Fixed temperature and fixed overturning ($\partial_{\rho'}\omega = 0$). By prescribing both the temperature and the angular velocity, (26) becomes:

$$\partial_t \begin{pmatrix} S'_r \\ S'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_r \\ S'_i \end{pmatrix}, \quad (28)$$

and the eigenvalues are simply: $\lambda_{\pm} = \pm i|\bar{\omega}|$. The first subharmonic is thus equivalent to those in the $n \neq 1$ case. The approximation of fixed ω comes to neglect the projection of the first harmonic perturbations ($n = 1$), then it is logical to find the same type of solution as for $n \neq 1$.

ii. Salinity-controlled overturning. Here, the influence of temperature anomalies on the overturning is assumed to be negligible compared to the effect of salinity anomalies. Then (26) becomes

$$\partial_t \begin{pmatrix} S'_r \\ S'_i \\ T'_r \\ T'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} + k\beta\bar{S}_i & 0 & 0 \\ -\bar{\omega} & -k\beta\bar{S}_r & 0 & 0 \\ 0 & k\beta\bar{T}_i & -r_T & \bar{\omega} \\ 0 & -k\beta\bar{T}_r & -\bar{\omega} & -r_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_r \\ S'_i \\ T'_r \\ T'_i \end{pmatrix}. \quad (29)$$

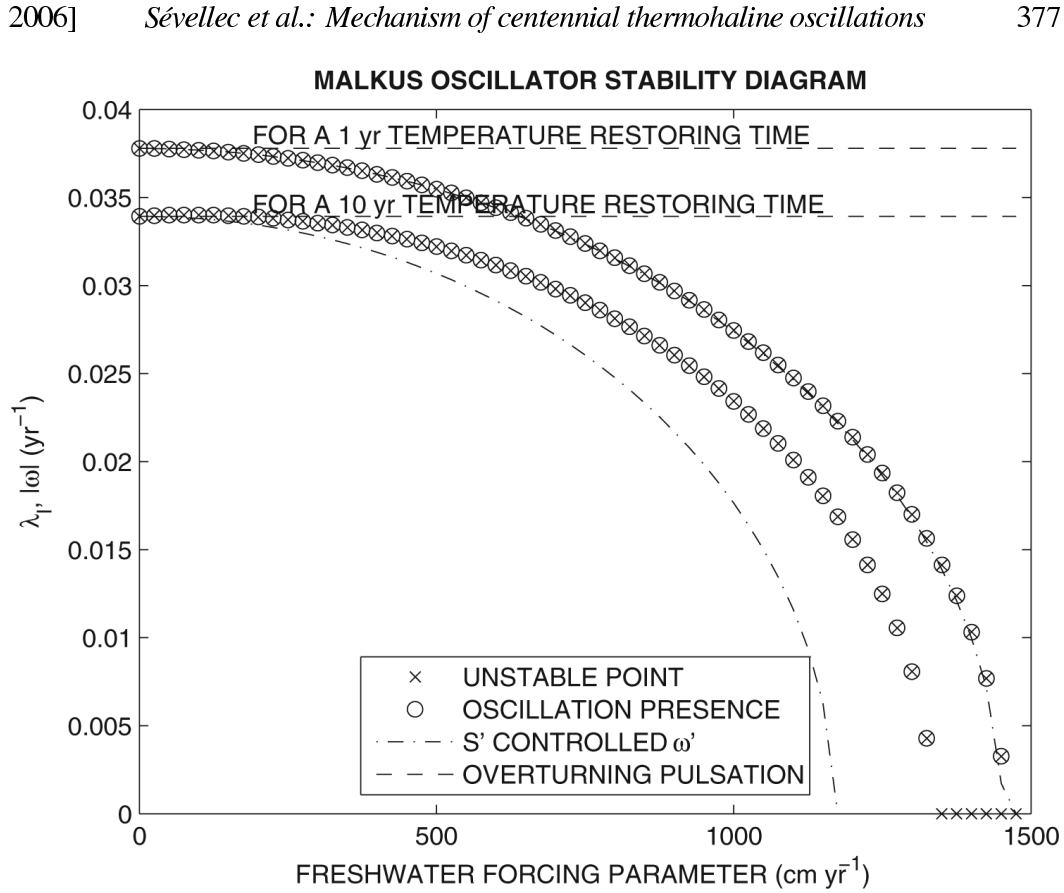


Figure 9. Stability diagram of the Malkus loop oscillator as a function of the freshwater intensity F_0 (up to very strong, unrealistic, values). Ordinate is the imaginary part of the eigenvalues for our different approximated systems compared to the overturning pulsation (dashed). All the points are unstable (except for $F_0 = 0$). The largest real part eigenmode is oscillatory until the critical values $F_0 = 1470$ (1350) cm yr^{-1} for the 1-yr (10-yr) temperature restoring time. Horizontal lines are the steady-state overturning pulsation in each case. The ‘salinity-controlled overturning’ subsystem is plotted in dash-dotted line.

In addition, we impose a realistic salinity forcing $I^S(\phi)$, consisting in an antisymmetric meridional structure (implying $I_r^S = 0$, see Fig. 7). The steady salinity structure is now symmetric ($\bar{S}_i = 0$). Using the steady state values (24c-d), the eigenvalues then satisfy

$$\left[\lambda^2 - \frac{k\beta F_0 S_0 I_i^S}{h\bar{\omega}} \lambda + \bar{\omega}^2 \right] [(\lambda + r_T)^2 + \bar{\omega}^2] = 0. \quad (30)$$

Let us focus first on the second part of this equation: the solutions of $(\lambda + r_T)^2 + \bar{\omega}^2 = 0$ are the complex conjugates $-r_T \pm i|\bar{\omega}|$. It corresponds to an oscillation at the overturning period with a strong damping rate $O(1 \text{ yr})$.

For the other part of the eigenvalues equation: $\lambda^2 - \lambda(k\beta F_0 S_0 I_i^S)/(h\bar{\omega}) + \bar{\omega}^2 = 0$, oscillations are possible only if

$$F_0 < \frac{2h\bar{\omega}^2}{k\beta S_0 |I_i^S|}. \quad (31)$$

Using the parameters in Table 5, the criterion becomes $F_0 < 1372 \text{ cm yr}^{-1}$ and applies fairly well to the general system too (Fig. 9), especially whenever the temperature restoring time is shortened. Eq. (31) can be interpreted as a nondimensional ratio between freshwater forcing and overturning advection: Increase of F_0 decreases the characteristic freshwater time scale, which becomes more important than the advection over the time evolution of the anomalies, and eventually disables the advective oscillation.

If the oscillation criterion is satisfied we get $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, with

$$\lambda_i = |\bar{\omega}| \sqrt{1 - \left(\frac{k\beta F_0 S_0 I_i^S}{2h\bar{\omega}^2} \right)^2}. \quad (32)$$

Given (31), $0 < \lambda_i < \bar{\omega}$, i.e. the oscillation period is systematically longer than the average overturning period. The oscillation growth rate is

$$\lambda_r = \frac{k\beta F_0 S_0 I_i^S}{2h\bar{\omega}} > 0, \quad (33)$$

which is always positive for our parameters (thermally-driven $\bar{\omega} < 0$, and $I_i^S < 0$ for tropical evaporation and subpolar precipitation): thus the oscillations are unstable. If (31) is satisfied the fixed point is an unstable spiral, otherwise it is an unstable node.

c. Physical mechanism of the oscillations

i. How can one understand the growth of the perturbations? Let us consider a positive haline anomaly at the equator surface advected by a thermal circulation ($\bar{\omega} < 0$, Fig. 10a). This anomaly reduces the meridional density gradient, and thus the resulting buoyancy torque reduces the overturning circulation. The residence time in the evaporation zone is then increased, which strengthens the anomaly. Then, when the anomaly quits the evaporation zone to enter the precipitation zone, it increases the meridional density gradient, and the overturning circulation is now enhanced by the resulting buoyancy torque. The residence time in the precipitation zone is then decreased. Since the positive haline anomaly spends more time in the evaporation zone than in the precipitation zone, it experiences a net salt increase. A same argument is valid for a negative haline anomaly. These sketches were numerically confirmed by introducing salinity perturbations in the loop model with weak diffusion and by following their evolution with time. It is worth noting that the growth crucially depends on the fact that the buoyancy flux resulting from the freshwater forcing opposes the buoyancy forcing resulting from the thermal fluxes, which set the sign of the overturning circulation. If the fluxes were not opposed, they would damp any anomaly (Fig. 10b).

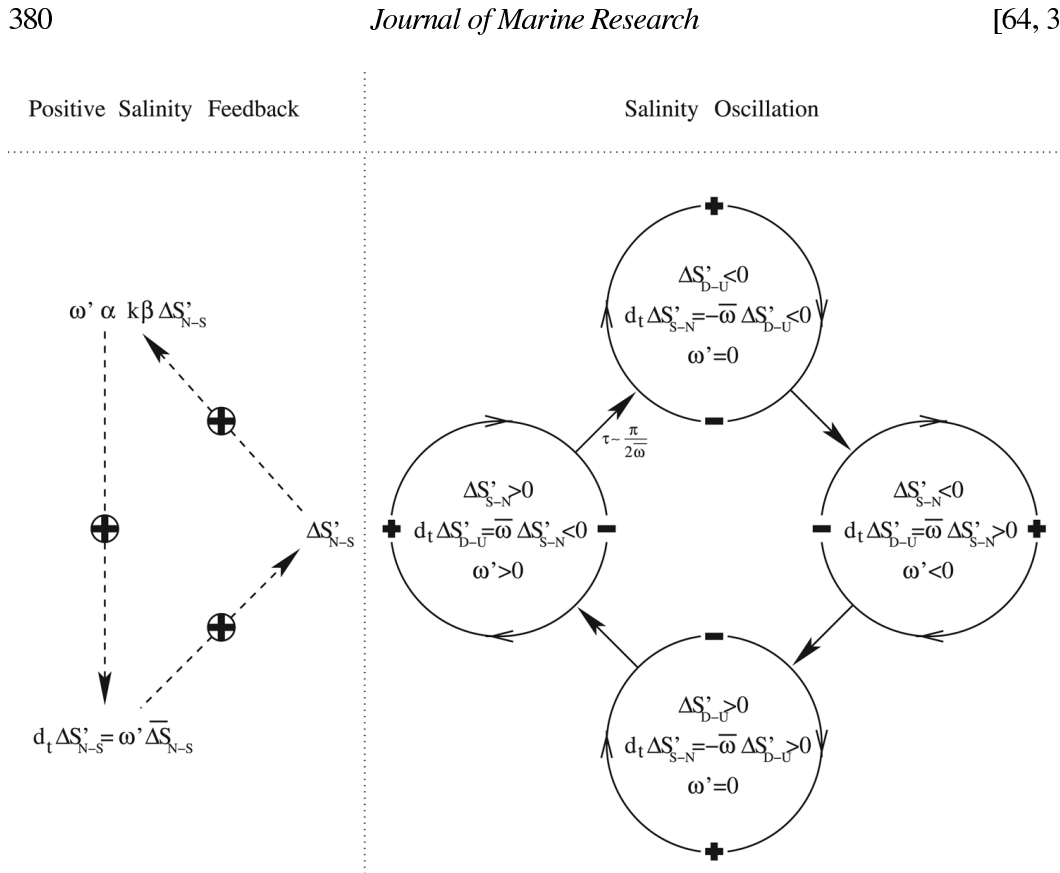


Figure 11. Schematic representation of the different mechanisms between the salinity oscillation regime (right, solid arrows) and the positive salinity feedback (left, dashed arrows). South-North (Down-Up) salinity gradients, $\Delta S'_{S-N}$ ($\Delta S'_{D-U}$), correspond to S'_i (S'_r) in the Howard-Malkus loop. Whether $\bar{\omega} \partial_\phi S'$ or $\omega' \partial_\phi \bar{S}$ term dominates the perturbed salinity advection we obtain respectively the salinity oscillation or the positive salinity feedback: (left) a retroaction diagram is sketched, arrows with circled signs corresponding to the sign of coupling; (right) the phases of a salinity oscillation are sketched, the circle represents the overturning loop ($\bar{\omega} < 0$), the $\pm$ signs corresponding to the sign of salinity anomalies, and the arrows corresponds to about a quarter-period delayed response. In some cases, oscillations will be sustained, at second order, by the positive salinity feedback.

This derives from the rate of change of the overturning (21) as a function of the salinity meridional gradient ($k\beta$), through the influence of the salinity surface forcing only in (20b): $F_0 S_0 |I_i^S|/h$. The characteristic time of the overturning circulation is simply:

$$\tau_O = \frac{1}{|\bar{\omega}|}.$$

A comparison of the two advection terms for the evolution of salinity anomaly, i.e. the mean flow advection of the salinity perturbation gradient and the anomalous advection of

the mean salinity gradient, shows a strong relation with these two timescales:

$$\frac{O(\overline{\omega} \partial_{\phi} S')}{O(\omega' \partial_{\phi} \overline{S})} = \frac{O\left(\overline{\omega} \sqrt{S_i'^2 + S_r'^2}\right)}{O(k\beta S_i' |\overline{S}_r|)} \approx \frac{\overline{\omega}^2 h}{k\beta F_0 S_0 |I_i^S|} \approx \frac{1}{2} \frac{\tau_{SF}^2}{\tau_O^2}. \quad (35)$$

Two cases arise depending on the ratio of these two characteristic times:

- If $\tau_{SF} > \tau_O$ the model is in the salinity oscillation regime. In this case the overturning circulation is so strong that the freshwater flux has almost no effect on the variations of the overturning circulation (ω'). At first order, the salinity variations are controlled by the mean flow advection of the salinity perturbation gradient ($\overline{\omega} \partial_{\phi} S'$), inducing the salinity oscillations (solid arrows in Fig. 11). At second order, small variations of the overturning allow dipolar anomalies to be sustained through the freshwater flux (Fig. 10a).
- If $\tau_{SF} < \tau_O$ the model is in the salinity feedback regime. The surface freshwater flux is here strong enough to significantly impact the salinity over an overturning period, hence the overturning circulation itself (ω'). The variations of salinity anomalies are controlled by the anomalous advection of the mean salinity gradient ($\omega' \partial_{\phi} \overline{S}$). The mean flow advection, predominant in the previous case, is now negligible: salinity anomalies grow and modify the overturning before being advected around the overturning loop. This case results in the positive salinity feedback regime sketched with dashed arrows in Figure 11 (Marotzke, 1996).

When the freshwater forcing amplitude is continuously increased in the Howard-Malkus loop, the regimes found are, first, a stable thermally-driven steady state, which is later destabilized through a Hopf bifurcation with growing centennial salinity oscillations, and further on through a second bifurcation with a non-oscillatory unstable mode driven by the positive salinity feedback regime. Most importantly, this scenario is also found in time integrations of 2-D and 3-D models.

5. Bihemispheric pole-to-pole configuration

a. Pole-to-pole 2-D model

In this section we investigate the centennial mode in a more realistic bihemispheric basin extending from 66S to 66N (other parameters alike those given in Table 1). Because of the great uncertainty in the observed freshwater forcing, we first run the 2-D model with no convection under surface restoring boundary conditions for temperature and salinity (Fig. 12). This experiment leads to a first steady-state. The implied freshwater flux is diagnosed (Fig. 12) and used in the second experiment carried out under mixed boundary conditions, but the initial state is perturbed by -1°C ($+1^{\circ}\text{C}$) in the northern (southern) hemisphere: the model settles in a pole-to-pole steady-state circulation revealing a strong overturning (around 24 Sv) with northern downwelling (Fig. 13). This procedure enables us

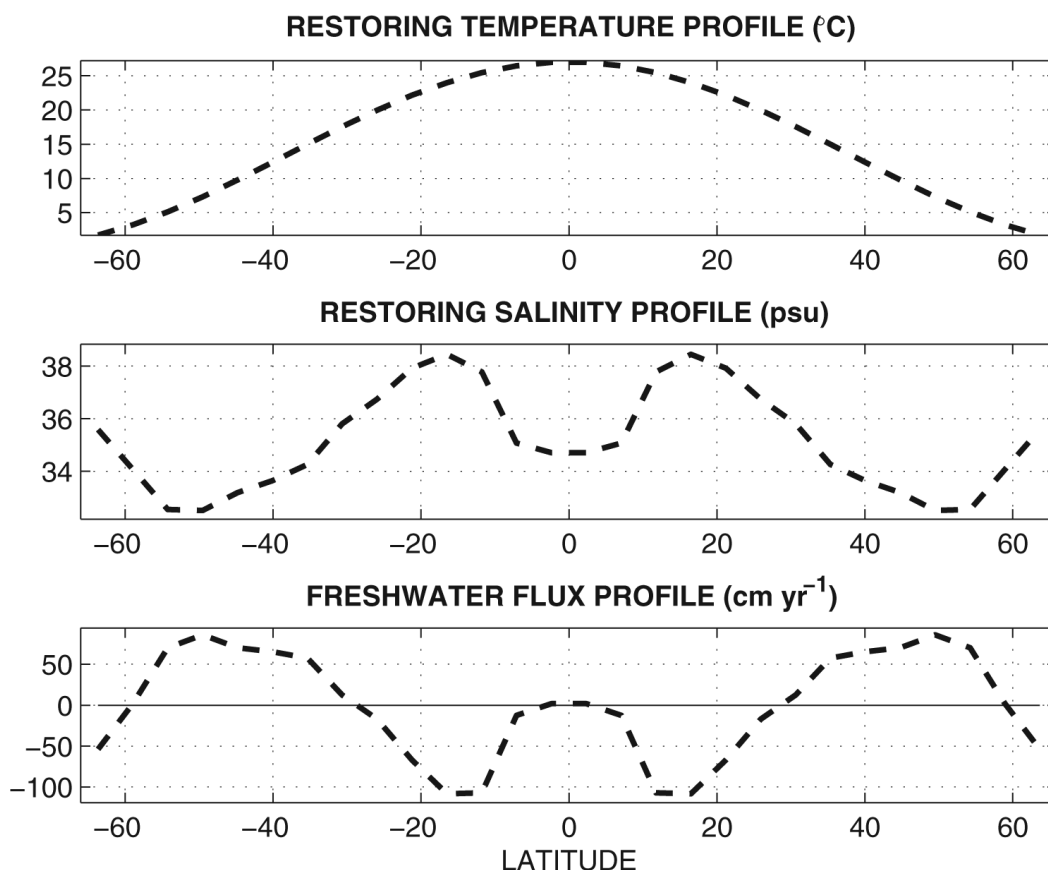


Figure 12. Forcing profiles in the bihemispheric configuration experiments. (top) Surface temperature restoring profile used for the bihemispheric configurations. (middle) Surface salinity restoring profile used to obtain the first bihemispheric steady state. (bottom) Freshwater flux diagnosed at the first bihemispheric steady-state under restoring surface boundary conditions for both temperature and salinity, and used for the subsequent bihemispheric experiments under mixed boundary condition.

to investigate the stability of a asymmetric bihemispheric circulation, but allows the salinity to evolve freely.

A linear stability analysis on this pole-to-pole steady state reveals a much longer oscillation period (733 yr) than previously, and strong damping (in 67 yr) (Fig. 13). The anomalies (whose density is strongly determined by salinity) seem to be passively advected by the mean circulation as observed in the single hemisphere configuration.

The upwelling region now extends on both hemispheres. Some of the salinity anomalies propagating southward at depth are brought back to the surface in the northern hemisphere, where they still experience a reinforcement through the surface freshwater fluxes, as described in the single hemispheric case. But, some among the salinity anomalies propagate down to the southern hemisphere (almost 10 Sv), and upwell in regions where the

2006] Sévellec et al.: Mechanism of centennial thermohaline oscillations 383

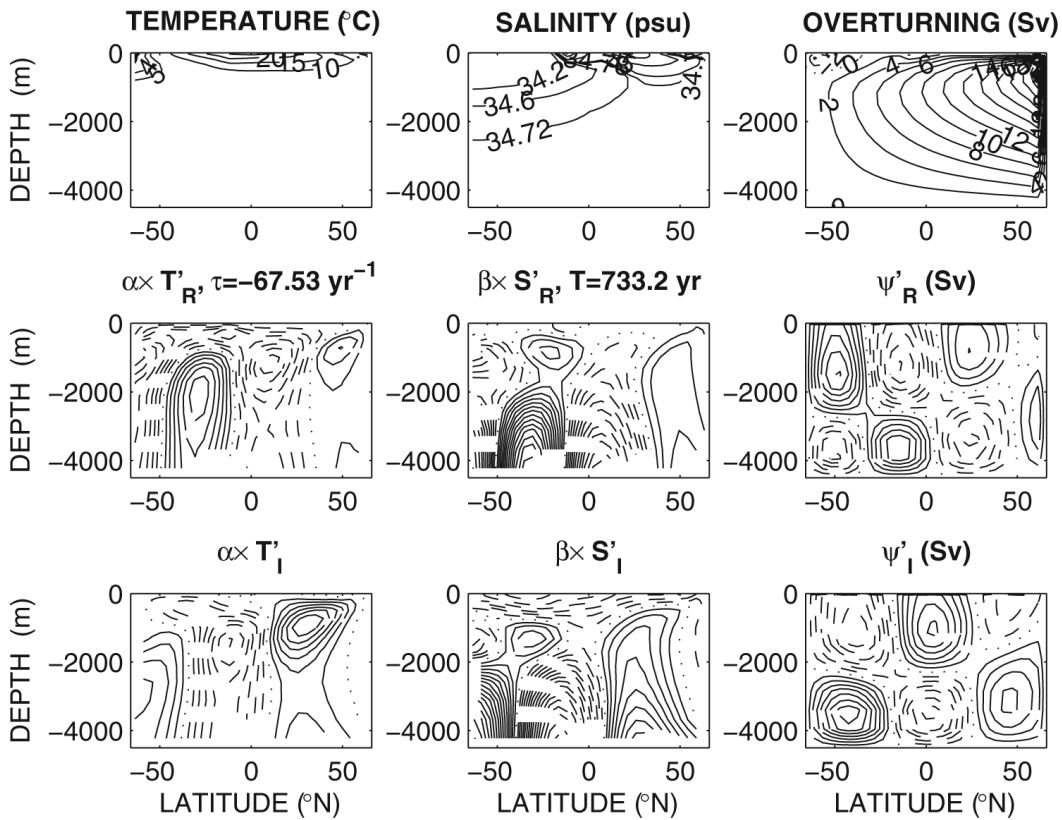


Figure 13. First row: temperature ($^{\circ}\text{C}$), salinity (psu) and overturning (Sv) of the steady state in our bihemispheric model. Second and third rows: less damped oscillation from the linear stability analysis of the bihemispheric pole-to-pole experiment. The solid, dashed and dotted lines respectively correspond to the positive, negative and zero anomalies. The periodic time evolution is: $X_R \rightarrow X_I \rightarrow -X_R \rightarrow -X_I \rightarrow X_R$. The anomalies at depth seem to be passively advected around the main overturning loop. Note that the mode is damped, and its period is now 733 yr.

freshwater flux may no longer provide reinforcement but rather weaken the anomalies. The net impact on the anomalies may finally be insufficient to counterbalance other damping effects like diffusion.

Hence the eigenmode is quite different from the single-hemisphere one as it has, now, a wavenumber 2 structure along the mean streamfunction contours. A major difference with the one-hemisphere solution is also the oscillation period now increased to 733 yr. However, the maximum overturning is around 24 Sv for a basin of twice the volume of the one hemisphere, so that the renewal time of the water remains the same (here, basin volume-to-maximum overturning ratio ~ 170 yr). These results may suggest a change in the physical mechanism between the two configurations.

As we can see in the density variance budget (Table 6) the bihemispheric pole-to-pole configuration introduces a strong diminution of the temperature forcing term which cannot

384

Journal of Marine Research

[64, 3

Table 6. As Table 4 for the bihemispheric pole-to-pole experiments: latitude-depth model (without and with Antarctic Circumpolar Current) and Howard-Malkus loop.

Two hemisphere:	Latitude-depth model		Howard-Malkus loop
Variance term	without ACC	with ACC	
$\text{Adv}(T', \bar{T})$	-0.00709	-0.0203	0.000646
$\text{Adv}(S', \bar{S})$	-0.00167	0.0104	0.000782
$\text{Adv}(T', \bar{S})$	0.00353	0.00669	-0.000402
$\text{Adv}(S', \bar{T})$	0.00649	-0.051	-0.00213
TotAdv	0.00126	-0.0542	-0.0011
$\text{Diff}(T', T')$	-0.0109	-0.00616	-0.00009
$\text{Diff}(S', S')$	-0.027	-0.0123	-0.00336
$\text{Diff}(T', S')$	0.0111	0.063	0.000184
$\text{Diff}(S', T')$	0.0111	0.063	0.000184
TotDiff	-0.0157	-0.0119	-0.00309
$\text{Forc}(T', T')$	-0.000106	-0.000112	-0.000461
$\text{Forc}(T', S')$	0.000697	-0.000416	0.00155
TotForc	0.000591	-0.000528	0.00109
Tot	-0.0139	-0.0666	-0.0031

counterbalance the high negative diffusive term, as it could be in the one hemispheric case (Table 6). The density variance budget, as our linear stability study, highlights the forcing to explain the damping of the centennial oscillation in this pole-to-pole configuration. We will now extend further the Howard-Malkus loop to a bihemispheric configuration, in order to better understand these changes in the structure and damping of the oscillatory eigenmode.

b. Howard-Malkus loop in bihemispheric configuration

Eqs. (20) are readily applicable to the bihemispheric case with only a modification of forcing geometries (I^T and I^S). Actually in the one hemispheric case, the atmospheric forcing is antisymmetric with respect to the middle latitude. In a bihemispheric case the forcing becomes symmetric with respect to the equator (Fig. 14). The renewal time of the water being the same in both cases, we will keep unchanged the frictional parameter (k) of the model.

The nonlinear time integration reveals damped oscillatory anomalies (Fig. 15) where density is salinity-dominated. The period of this oscillation is around 605 yr (Table 2).

As expected this experiment shows a strong modification of the centennial oscillation mechanism upon the shift from one- to two-hemisphere configuration. The only change between the two Howard-Malkus configurations is the geometry of the forcing; the slight variation in freshwater intensity (from 80 to 101 cm yr⁻¹) cannot explain such a big difference in the oscillation period. This geometry was previously shown to be of high importance for the oscillation growth and mechanism in the one-hemispheric case; so the issue now

2006]

Sévellec et al.: Mechanism of centennial thermohaline oscillations

385

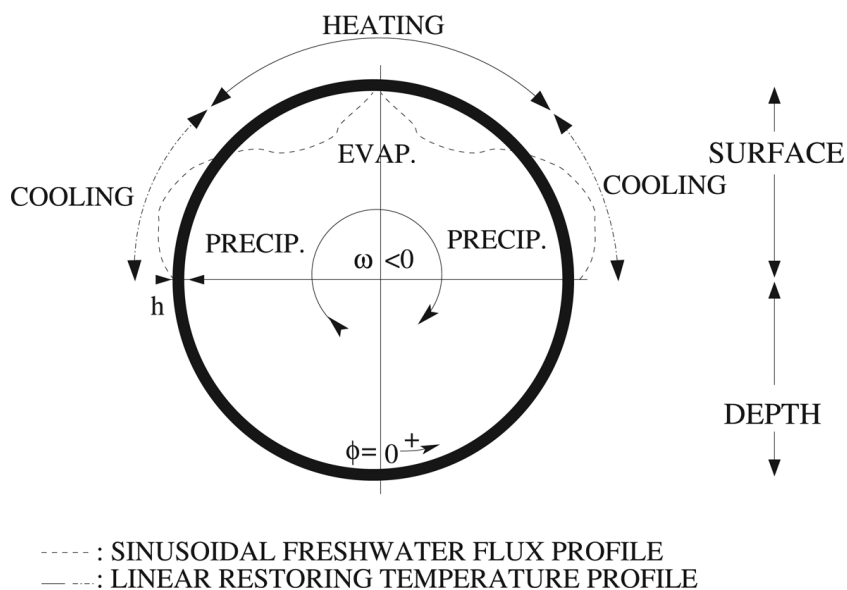


Figure 14. Bihemispheric configuration of the Howard-Malkus loop with symmetric forcing.

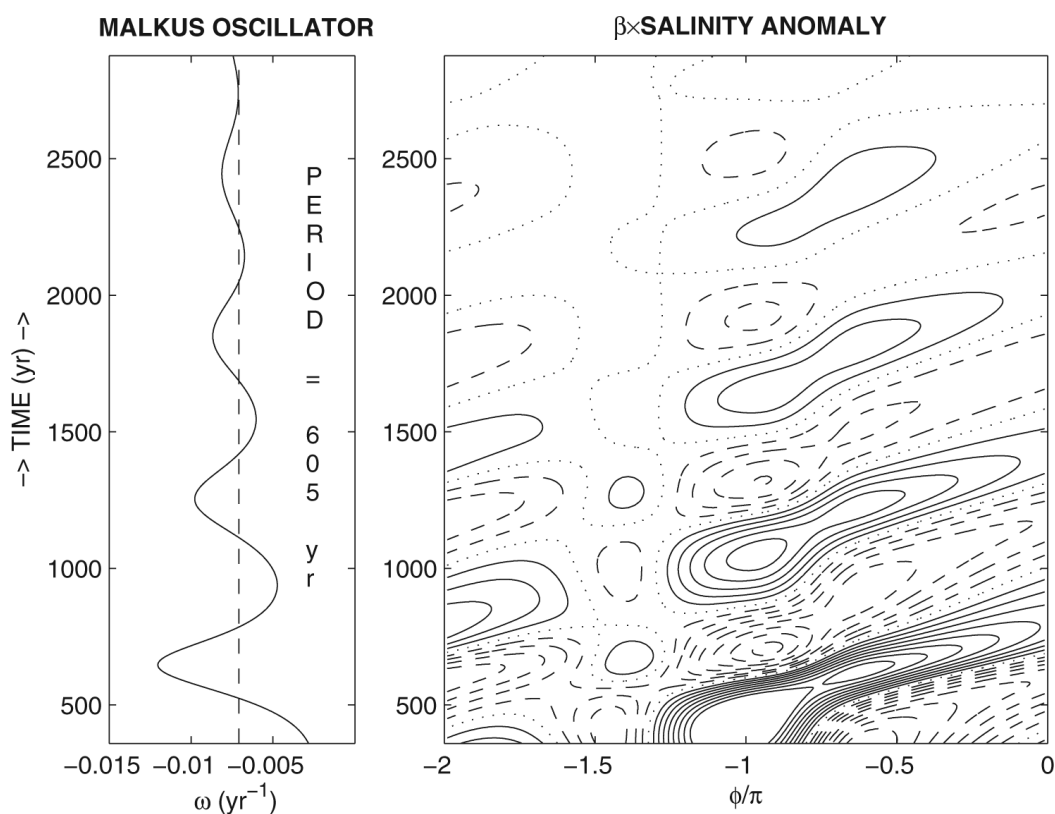


Figure 15. Nonlinear integration of the bihemispheric Howard-Malkus loop model showing a damped oscillation of 605-yr period.

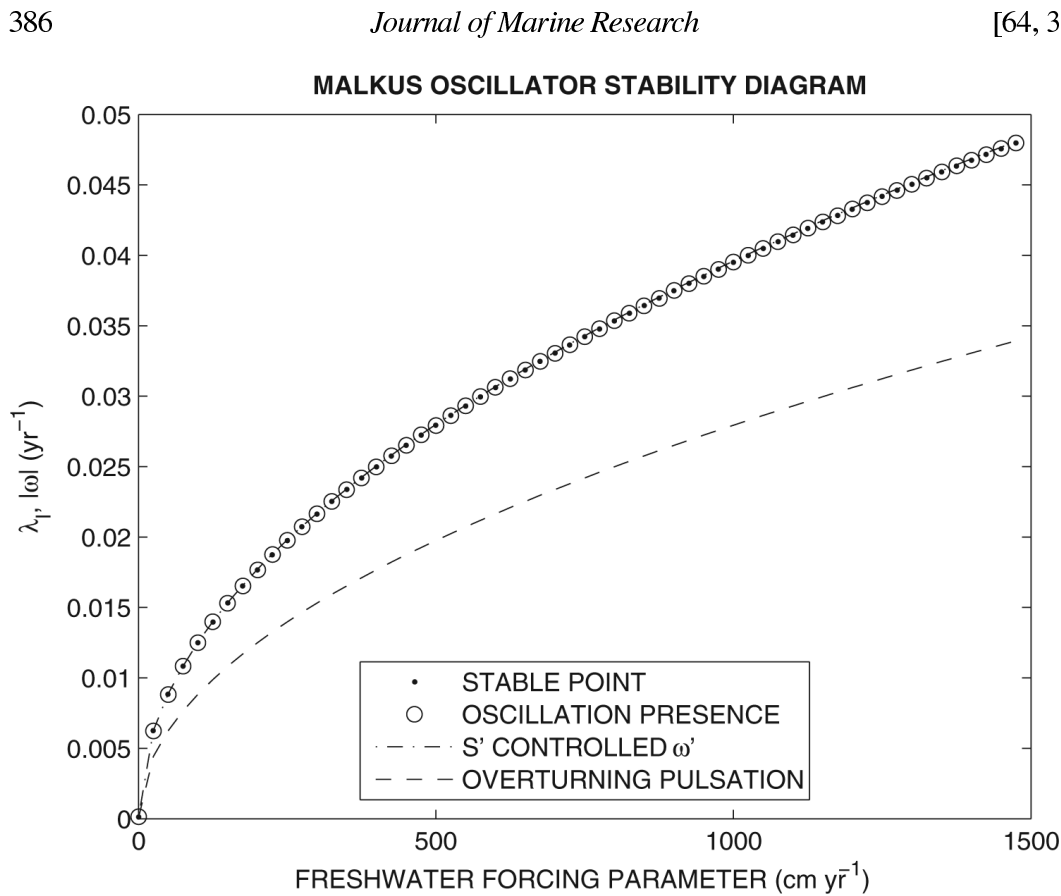


Figure 16. Stability diagram for the bihemispheric Malkus loop oscillator as a function of the freshwater intensity F_0 (up to very high, unrealistic, values). All the points are stable. The eigenmode with the largest real part is oscillatory. Dashed lines are the steady-state overturning pulsation in each case. The ‘salinity-controlled overturning’ subsystem is plotted in dash-dotted line.

is to understand why and how the period and growth of the centennial oscillations are so deeply modified by this new forcing geometry.

We will thus perform the same kind of analysis, through modal decomposition, as previously done to obtain the steady state (24a-d) and perturbations (26). This decomposition evidenced a strong modification of the steady state responsible for changes in the perturbations equations. The projection of the forcing now occurs on harmonics different from those in the one hemispheric case: I_i^T and I_i^S are canceled instead of I_r^T and I_r^S . As a result, the mean overturning $\bar{\omega}$ is controlled by salinity instead of temperature ($\bar{\omega} \simeq k\beta\bar{S}_i$).

Results for modes $n \neq 1$ are not modified (27). For $n = 1$, the diagram of stability shows a stable oscillatory branch (Fig. 16) really different from the one found in the one hemispheric case (Fig. 9). The oscillation period for a freshwater amplitude of 101 cm yr^{-1} is 502 yr, and is comparable to the one found for the bihemispheric pole-to-pole configuration with the 2-D model (733 yr).

Concerning the ‘salinity-controlled overturning’ subsystem, the symmetric geometry of the forcing ($I_i^S = 0$ induces $\overline{S_r} = 0$) leads to the following characteristic equation from (29) and (24c-d):

$$[\lambda^2 + \omega^2 + \omega k \beta \overline{S_i}][(\lambda + r_T)^2 + \overline{\omega}^2] = 0. \quad (36)$$

The second part of the equation leads to the complex conjugate solutions: $-r_T \pm i|\overline{\omega}|$. It corresponds to an oscillation at the overturning period with a strong damping rate $O(1 \text{ yr})$. The first part of the equation provides a purely oscillatory eigenmode (although the nonlinear time integration shows a damped oscillation, because of diffusion not considered in this calculation):

$$\lambda = i\sqrt{\overline{\omega}^2 + \frac{k\beta S_0 F_0 I_r^S}{h}}, \quad (37)$$

which corresponds to an oscillation period of 502 yr for a freshwater intensity worth 101 cm yr^{-1} . The control of overturning by salinity ($\overline{\omega} \simeq k\beta \overline{S_i}$) leads to the simple solution $\lambda \simeq i\sqrt{2}|\overline{\omega}|$. In this pole-to-pole configuration the period is no longer as close to $\overline{\omega}$ as in the one hemispheric case.

Unlike in the one hemispheric case, the growth of the anomaly is, here, impossible. Actually the decrease and increase of overturning by the anomalies are no longer correlated with the adequate forcing zone. As shown in Figure 17 the anomaly cannot be enhanced by the salinity feedback in a bihemispheric case. This result highlights the importance of the duality between the temperature-dominated steady flow and the impact of salinity-dominated

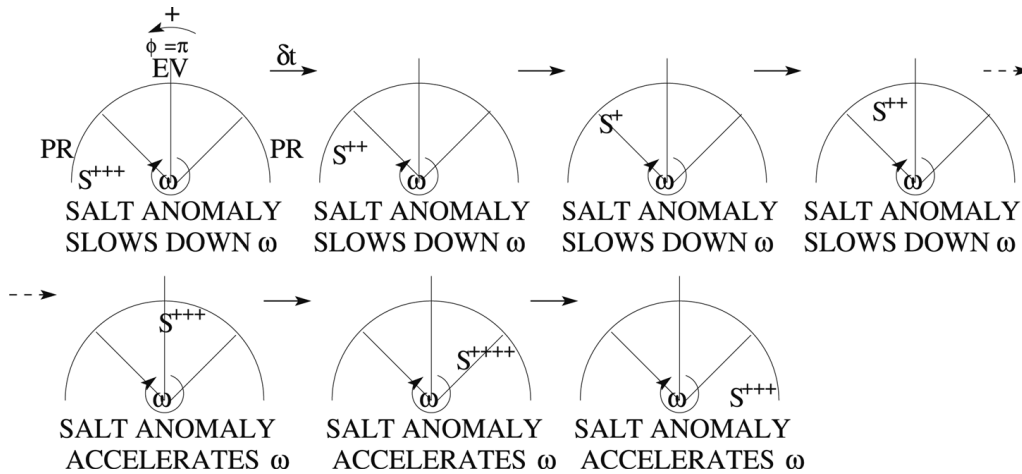


Figure 17. Schematic representation of the time evolution of salinity anomalies passing through the freshwater forcing zone and influencing the overturning ω in the bihemispheric case. Perturbation growth or decay is a function of the freshwater forcing configuration, here tropical evaporation and subpolar precipitation in both hemispheres. The perturbation decreases as much as it increases the overturning in each salinity forcing zone. Hence the perturbation does not experience a net increase. In a symmetric forcing case there is then no positive salinity feedback.

anomaly on the overturning. This duality does no longer exist in the bihemispheric configuration where the steady state and anomaly are both driven by salinity.

The density variance budget (Table 6) shows a negative total density variance due to a negative contribution of the advection.

c. Pole-to-pole case with ACC

To take into account the main source of north-south asymmetry in the global ocean circulation, let us now include a crude parametrization of the Antarctic Circumpolar Current (ACC) through the Drake passage, extending here from 62S to 40S and 2500 m deep. Because of the opening in this passage, a periodic boundary condition requires a null zonal pressure difference, and thus the dynamical equation (4) has to be modified; following Paillard and Cortijo (1999) we simply increase the local friction coefficient by a factor 1000 to substantially reduce the meridional velocities in the ACC.

The same restoring surface temperature, freshwater flux and initial fields from the previous experiment are used. The model settles into a steady state. A linear stability analysis allows us to identify the centennial oscillatory eigenmode as a damped oscillatory mode (Fig. 18). Anomalies in temperature and salinity are advected all around the North Atlantic overturning cell, and their density is dominated by salinity. Their structure is very close to the single hemisphere case. The oscillation period is 750 yr, which is more than twice the one in the single hemisphere experiment but close to the one in the pole-to-pole case. This damped oscillation is governed by the same mechanism as the one discussed in the previous pole-to-pole 2-D and loop models.

A density variance budget is again performed to quantify the damping mechanism of the oscillation in the last configuration (Table 6). The main difference between the cases with and without ACC is the contributions of advection and restoring surface temperature that become negative: hence the density variance is strongly damped.

d. Discussion

Such a centennial-scale oscillation where a large-scale salinity anomaly is advected all around the overturning cell has been presented in the Large-Scale-Geostrophic (LSG) global ocean model forced by mixed boundary conditions with stochastic noise added to the freshwater forcing (Mikolajewicz and Maier-Reimer, 1990). This study presents a compelling figure of zonally-averaged salinity anomaly in the Atlantic where a dipole propagates in a way very similar to our findings. This similarity seems to validate a posteriori our 2-D model approach; hence, for investigations on such long-period and large-scale oscillations the zonally-averaged model seems a valid simplification.

More recently, Weijer and Dijkstra (2003) described a damped oscillation through a linear stability analysis of a global 3-D ocean model: its pattern resembles ours except that the dipole anomalies are advected over the whole conveyor belt across the Antarctic Circumpolar Current and Pacific Ocean. Their study reported on a similar scale for thermal

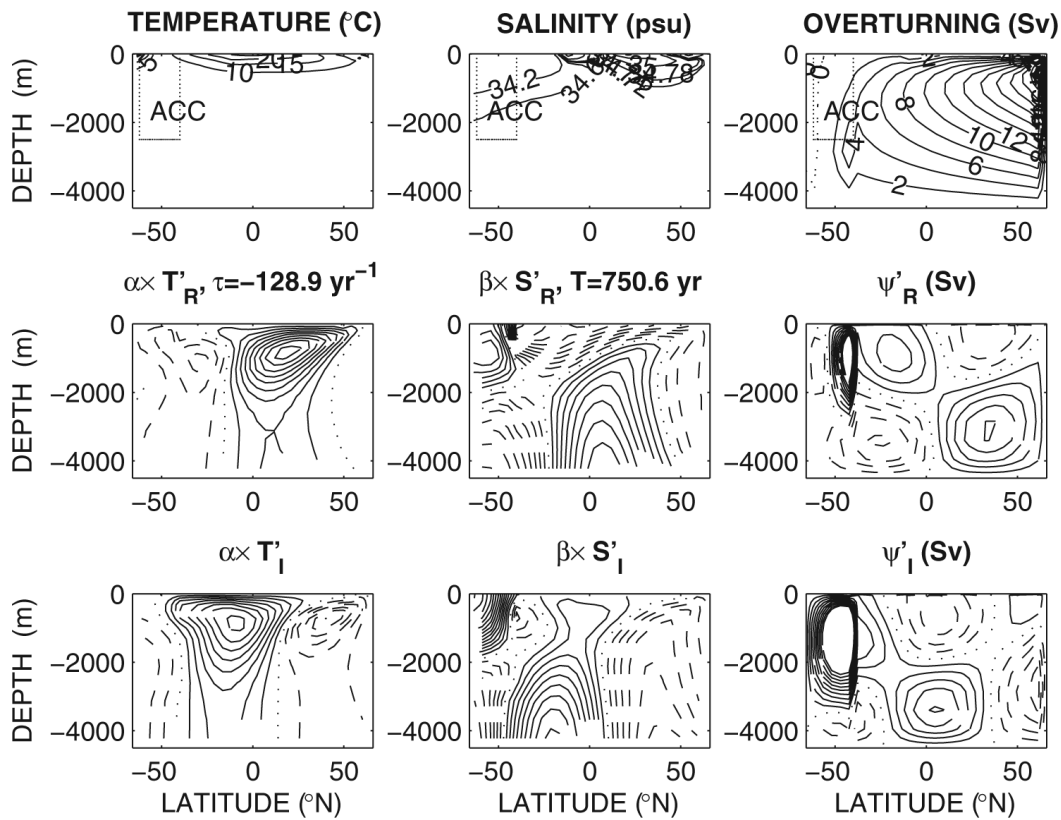


Figure 18. As in Figure 13 for the asymmetric configuration with ACC. The anomalies seem to be passively advected around the main overturning loop in the northern basin. The oscillatory eigenmode, which period is 750 yr, is damped.

and haline anomalies, but gave no clue about the dominant term. However, their 3-D model remains very frictional, and may not differ too much from our 2-D approximation.

6. Conclusion

This study discussed the stability of simplified models of the oceanic thermohaline circulation able to reproduce the centennial scale oscillations found in 3-D models. We used a 2-D latitude-depth model based on planetary geostrophic dynamic. By considering, first, a single-hemisphere basin configuration under mixed boundary conditions, we observed centennial oscillations with a density signature more intense in salinity than in temperature. A linear stability analysis revealed the same centennial oscillation. A density variance budget provided an objective way to identify the sources of variance sustaining the oscillations against dissipation, i.e. the temperature restoring term, through well-correlated temperature and salinity anomalies likely associated with changes in the overturning.

To get the roots of the oscillation mechanism, we also used an even more simplified model constituted by the 1-D Howard-Malkus loop oscillator. Through various cases tractable

analytically, we characterized the different regimes and damping processes of oscillation. We found that the period is set by the mean overturning advection. At first order, salinity anomalies are purely advected by the mean overturning flow. The mechanism sustaining this oscillation enters at second order, it is close to the traditional positive salinity feedback. Growing salinity oscillations and positive salinity feedback correspond to a different regime of the same mechanism ruled by the model parameters, namely, the characteristic time scale of the overturning and the response time of the overturning to the salinity forcing. Below a threshold for the freshwater flux, oscillations are possible because salinity anomalies are advected by the mean flow faster than reinforced by the freshwater flux (through the anomalous advection of the mean salinity gradient). Above the threshold, reinforcement of salinity anomalies and subsequent modifications of the overturning overwhelm the mean flow advection and lead to the positive feedback.

Maybe in contrast with the 2-D model, the density variance budget in the Howard-Malkus loop suggests an internal instability connected to the correlation of salinity and overturning anomalies. In fact, depending on the surface temperature relaxation strength, the forcing contribution to the density variance of the centennial oscillations can be either positive (for the case most similar to the two-dimensional model) or negative (stronger relaxation). These considerations made us suggest that the salinity-overturning oscillator mechanism applies to the 2-D case, but requires some help from the surface temperature relaxation to be sustained against the dissipation. The tracer diffusion is certainly the most active damping term, as already shown for interdecadal oscillations (Huck *et al.*, 1999a).

At last, the configuration of our 2-D model is adapted to a single basin extending on the two hemispheres. Oscillations are no longer sustained through the nonlinear model integration. Linear stability analyzes performed at various pole-to-pole steady states, with and without a parametrization of the Antarctic Circumpolar Current through the Drake passage, showed damped eigenmodes with spatial structures very similar to the ones found in a single hemisphere. These last results confirm that the centennial oscillation is more heavily damped and cannot persist in such a bihemispheric configuration. The Howard Malkus loop analysis extended to this two-hemisphere configuration suggests that the symmetric surface forcing strongly damps the oscillations, but also largely increases the oscillation period (fundamentally the steady state overturning is no longer thermally- but salinity-driven). These oscillations would need strong stochastic noise in the atmospheric forcing to be continuously excited (Mysak *et al.*, 1993). These results are in agreement with experiments in 3-D global ocean models (Mikolajewicz and Maier-Reimer, 1990; Weijer and Dijkstra, 2003) showing that (i) the centennial mode structure and mechanism are well captured in a zonally-averaged 2-D ocean model, and (ii) the centennial mode is strongly damped and requires stochastic forcing to be excited.

The mechanism and signature of the centennial oscillation now being clearly identified in simplified models, they need to be tested in 3-D realistic global models in order to determine their most realistic patterns and growth or damping rate. Given the critical role of the surface relaxation for the oscillation damping or growth, this oscillation mechanism

2006] Sévellec et al.: Mechanism of centennial thermohaline oscillations 391

should be tested in more realistic ocean models coupled with atmospheric models, eventually simplified like energy balance model ones. The salinity being the essential density variable for the oscillation, the coupling with sea-ice would be worth considering given its influence on the freshwater flux and air-sea interactions. These studies should give more insight into the robustness of this centennial oscillation and into its possible relevance for observed or future climate variability.

Acknowledgments. Thorough proofreadings, corrections and suggestions by Alain Colin de Verdière, Henk Dijkstra, and especially Jochem Marotzke, are gratefully acknowledged and have significantly streamlined and clarified the original manuscript.

REFERENCES

- Arzel, O. 2004. Mécanismes de variabilité climatique interdécennale dans des modèles idéalisés. Ph.D. thesis, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, 240 pp.
- Arzel, O., T. Huck and A. Colin de Verdière. 2006. The different nature of the interdecadal variability of the thermohaline circulation under mixed and flux boundary conditions. *J. Phys. Oceanogr.*, (in press).
- Colin de Verdière, A. and T. Huck. 1999. Baroclinic instability: an oceanic wavemaker for interdecadal variability. *J. Phys. Oceanogr.*, 29, 893–910.
- Dewar, W. K. and R. X. Huang. 1995. Fluid flow in loops driven by freshwater and heat fluxes. *J. Fluid Mech.*, 297, 153–191.
- . 1996. On a forced flow of salty water in a loop. *Phys. Fluids*, 4, 954–970.
- Dijkstra, H. and M. J. Molesmaker. 1997. Symmetry breaking and overturning oscillations in thermohaline-driven flows. *J. Fluid Mech.*, 4, 169–198.
- Howard, L. N. 1971. ABC's of convection. Geophysical Fluid Dynamics Summer Program. Tech. Rep., 71-63, 102-105, WHOI internal report.
- Huang, R. X. 1993. Real freshwater flux as a natural boundary condition for the salinity balance and thermohaline circulation forced by evaporation and precipitation. *J. Phys. Oceanogr.*, 23, 2428–2446.
- Huang, R. X. and W. K. Dewar. 1996. Haline circulation: bifurcation and chaos. *J. Phys. Oceanogr.*, 26, 2093–2106.
- Huck, T., A. Colin de Verdière and A. J. Weaver. 1999a. Interdecadal variability of the thermohaline circulation in box-ocean models forced by fixed surface fluxes. *J. Phys. Oceanogr.*, 29, 865–892.
- Huck, T. and G. K. Vallis. 2001. Linear stability analysis of three-dimensional thermally-driven ocean circulation : application to interdecadal oscillations. *Tellus*, 53A, 526–545.
- Huck, T., A. J. Weaver and A. Colin de Verdière. 1999b. On the influence of the parameterization of lateral boundary layers on the thermohaline circulation in coarse-resolution ocean models. *J. Mar. Res.*, 57, 387–426.
- Jones, P. D. and M. E. Mann. 2004. Climate over past millennia. *Rev. Geophys.*, 42, RG2002, doi: 10.1029/2003RG000143.
- Keller, J. B. 1966. Periodic oscillations in a model of thermal convection. *J. Fluid Mech.*, 26, 599–606.
- Lorenz, E. N. 1955. Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus*, VII, 157–167.
- Maas, L. R. M. 1994. A simple model for the three-dimensional, thermally and wind-driven ocean circulation. *Tellus*, 46A, 671–680.
- Malkus, W. V. R. 1972. Non-periodic convection at high and low Prandtl number. *Mémoires Société Royale des Sciences de Liège*, 6^e Serie, Tome IV, 125–128.

- Marotzke, J. 1996. Analysis of thermohaline feedbacks, *in* Decadal Climate Variability: Dynamics and Predictability, D. L. T. Anderson and J. Willebrand, eds., NATO ASI Series, Series I, 44, 333–378.
- Marotzke, J. and J. R. Scott. 1999. Convective mixing and the thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, 29, 2962–2970.
- Marotzke, J., P. Welander and J. Willebrand. 1988. Instability and multiple steady states in a meridional-plane model of the thermohaline circulation. *Tellus*, 40A, 162–172.
- Mikolajewicz, U. and E. Maier-Reimer. 1990. Internal secular variability in an ocean general circulation model. *Climate Dyn.*, 4, 145–156.
- Mysak, L. A., T. F. Stocker and F. Huang. 1993. Century-scale variability in a randomly forced, two-dimensional thermohaline ocean circulation model. *Climate Dyn.*, 8, 103–106.
- Paillard, D. and E. Cortijo. 1999. A simulation of the Atlantic meridional circulation during Heinrich event 4 using reconstructed sea surface temperatures and salinity. *Paleoceanography*, 14, 716–724.
- Quon, C. and M. Ghil. 1995. Multiple equilibria and stable oscillations in thermosolutal convection at small aspect ratio. *J. Fluid Mech.*, 291, 33–56.
- Stocker, T. F. and L. A. Mysak. 1992. Climatic fluctuations on the century time scale: a review of high-resolution proxy data and possible mechanisms. *Clim. Change*, 20, 227–250.
- Stommel, H. 1961. Thermohaline convection with stable regimes flow. *Tellus*, 13, 224–230.
- Te Raa, L. A. and H. A. Dijkstra. 2002. Instability of the thermohaline ocean circulation on interdecadal timescales. *J. Phys. Oceanogr.*, 32, 138–160.
- 2003. Modes of internal thermohaline variability in a single-hemispheric ocean basin. *J. Mar. Res.*, 61, 491–516.
- Tziperman, E. *et al.* 1994. Instability of the thermohaline circulation with respect to mixed boundary-conditions: Is it really a problem for realistic models? *J. Phys. Oceanogr.*, 24, 217–232.
- Weaver, A. J., E. S. Sarachik and J. Marotzke. 1991. Freshwater flux forcing of decadal and interdecadal oceanic variability. *Nature*, 353, 836–838.
- Weijer, W. and H. A. Dijkstra. 2003. Multiple oscillatory modes of the global ocean circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, 33, 2197–2213.
- Welander, P. 1957. Note on the self-sustained oscillations of a simple thermal system. *Tellus*, IX, 419–420.
- 1965. Steady and oscillatory motions of a differentially heated fluid loop. *Tech. Rep.*, 65-48, Woods Hole Oceanographic Institution, 34 pp.
- 1967. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop. *J. Fluid Mech.*, 29, 17–30.
- 1986. Thermohaline effects in the ocean circulation and related simple models, *in* Large-scale Transport Processes in Oceans and Atmosphere, D. L. T. Anderson and J. Willebrand, eds., 163–200.
- Winton, M. and E. S. Sarachik. 1993. Thermohaline oscillations induced by strong steady salinity forcing of ocean general circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, 23, 1389–1410.
- Wright, D. G. and T. F. Stocker. 1991. A zonally averaged ocean model for thermohaline circulation. Part I : model development and flow dynamics. *J. Phys. Oceanogr.*, 21, 1713–1724.
- Wright, D. G., T. F. Stocker and D. Mercer. 1998. Closures used in zonally averaged ocean models. *J. Phys. Oceanogr.*, 28, 791–804.
- Wright, D. G., C. B. Vreugdenhil and T. M. Hughes. 1995. Vorticity dynamics and zonally averaged ocean circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, 25, 2141–2154.
- Zhang, S., C. A. Lin and R. J. Greatbatch. 1992. A thermocline model for ocean-climate studies. *J. Mar. Res.*, 50, 99–124.

Received: 4 August, 2004; revised: 9 February, 2006.

Chapitre 2

Oscillation millénaire

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons identifié un mode de variabilité centenaire apparaissant à travers une bifurcation de Hopf lorsque l'intensité du flux d'eau douce est augmenté. Cette variabilité est caractérisée par la présence d'un cycle limite autour de l'état d'équilibre instable. Cette étude dans une direction de l'espace des paramètres nous a permis de mieux comprendre la stabilité et la variabilité de la circulation thermohaline.

Nous nous proposons de continuer d'explorer les bifurcations apparaissant dans cette même direction de l'espace des paramètres. Ceci nous permettra d'entrevoir et de comprendre la déstabilisation du cycle limite centenaire.

L'augmentation du flux d'eau douce dans des modèles de circulation thermohaline (où la température et la salinité sont les seules variables dynamiques) engendre de la variabilité. Cette variabilité oscille sur une période de l'ordre du millier d'années et possède les caractéristiques des oscillations de relaxation (Strogatz, 1994). Ces résultats ont pu être mis en évidence, notamment, dans l'étude de Winton et Sarachik (1993). Plus récemment, Colin de Verdière et al. (2006) présentent les bifurcations et leurs caractéristiques liées à cette variabilité millénaire dans un modèle équivalent à celui de notre section précédente. Ces bifurcations apparaissent lors de modifications de certains paramètres de contrôle, comme notamment l'intensité du flux d'eau douce.

Dans la suite de notre étude nous nous proposons d'étendre le travail de Colin de Verdière et al. (2006), et ainsi de mieux caractériser les bifurcations de cette variabilité millénaire et ces mécanismes. Pour cela nous décrirons nos oscillations en caractérisant les phases importantes de celles-ci (section 2.2). Puis nous analyserons les oscillations près de leurs bifurcations, ainsi nous remarquerons l'apparition de hautes fréquences (centenaires) lors de la déstabilisation des états d'équilibre induisant un allongement de la période de l'oscillation millénaire (section 2.3). Enfin, nous résumerons les résultats obtenus lors de cette étude et nous proposerons quelques perspectives de travaux futurs (section 2.4).

Le modèle 2-D en latitude-profondeur qui sera utilisé est équivalent à celui utilisé dans le chapitre 1 (Sévellec et al., 2006, PG2D), à la différence du coefficient de friction linéaire et de l'intensité du flux d'eau douce (Tab. 2.1).

TAB. 2.1 – Paramètres utilisés pour les intégrations temporelles du modèle 2-D.

F_0	60 – 200 cm yr ⁻¹	intensité du flux d'eau douce
ε	1.45×10^{-4} s ⁻¹	coefficient de friction linéaire
ε	2.90, 7.25, 18.49×10^{-4} s ⁻¹	autres coefficients de friction linéaire

2.2 États d'équilibres et oscillation millénaire

2.2.1 États d'équilibres

Les intégrations temporelles du modèle 2-D, sous conditions mixtes, révèlent deux états d'équilibre différents pour différentes valeurs de l'intensité du flux d'eau douce (Fig. 2.1). Ce résultat est en accord avec ceux du modèle en boîtes de Stommel (1961). Pour des faibles valeurs de l'intensité du flux d'eau douce nous obtenons un état d'équilibre correspondant à une forte stratification dans les 500 premiers mètres. Cette stratification dominée par la température induit une circulation vers le nord à la surface, une plongée des eaux au nord et une recirculation avec une remontée vers le sud dans le reste du bassin. Pour des fortes valeurs de l'intensité du flux d'eau douce nous obtenons un état d'équilibre avec une forte stratification dans les 1 000 premiers mètres. La stratification est dominée par la salinité et entraîne un transport de masse de surface vers le sud, une plongée des eaux situées au sud, et une recirculation par une remontée vers le nord des eaux, dans le reste du bassin. En plus de cela, deux circulations secondaires sont caractérisées par un transport de masse en surface vers le nord dans les zones sud et nord du bassin. En effet, l'inversion du gradient du flux d'eau douce aux hautes et basses latitudes entraîne une inversion du gradient de salinité. Ce dernier explique l'apparition des deux transports de masse de surface vers le nord aux extrémités du bassin. Ces deux états d'équilibre sont respectivement appelés équilibre thermique et équilibre halin ; leurs domaines d'existence sont respectivement appelés régime thermique et régime halin.

2.2.2 Oscillation millénaire, description

Entre ces deux régimes, les intégrations temporelles du modèle 2-D révèlent de la variabilité. Cette variabilité est une oscillation se déroulant sur une échelle de temps millénaire (Fig. 2.2). Son domaine d'existence est appelé le régime d'oscillation millénaire. Cette oscillation entraîne de forts changements de la chaleur échangée avec l'atmosphère dans les régions du nord (Fig. 2.3), et peut entraîner de fortes modifications du climat de ces régions. Cette variabilité millénaire est une candidate pour expliquer les modifications

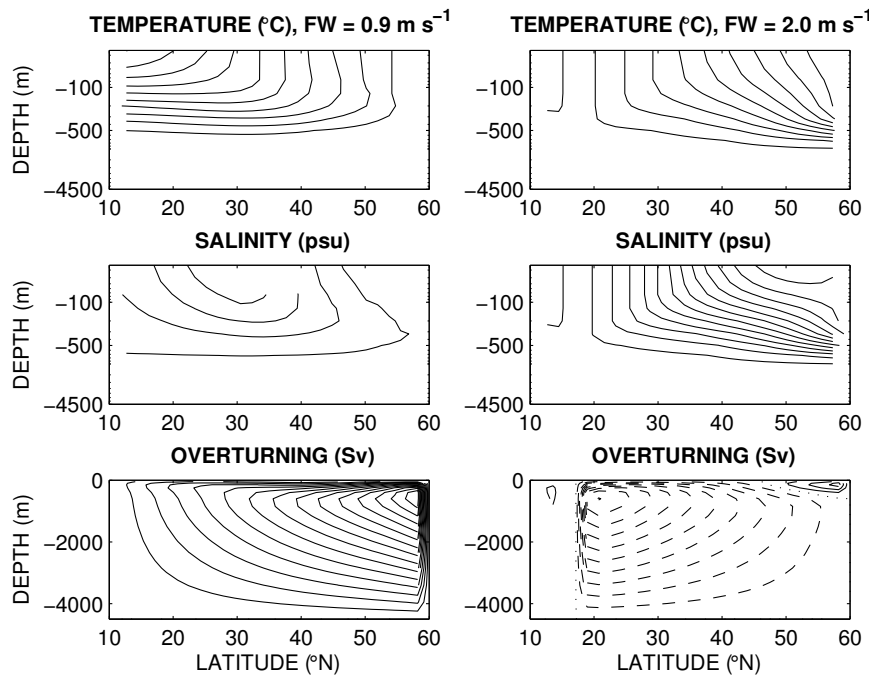


FIG. 2.1 – À gauche (droite), état d'équilibre thermique (halin) caractérisé par une forte stratification de température et de salinité dans les 500 (1 000) premiers mètres, le premier (second) dominant la stratification de la densité. La circulation induite est intensifiée en surface avec un courant moyen vers le nord (sud) et une plongée des eaux au nord (sud). La circulation de l'équilibre halin est aussi caractérisée par deux cellules de faible circulation, localisées au sud et au nord, induisant un courant de surface vers le nord. Les traits pleins, tiretés et pointillés correspondent aux anomalies positives, négatives et nulles : l'intervalle des contours est respectivement 2°C , 0.5 psu et 1 Sv de (gauche) 4 à 24°C , 35 à 37 psu et 0 à 15 Sv ; (droite) 4 à 24°C , 29 à 36 psu et -10 à 3 Sv .

futures et passées du climat sur de longues échelles de temps. L'évolution de l'oscillation est caractérisée par deux phases séparées par deux changements rapides. C'est une caractéristique de l'oscillation de relaxation (Strogatz, 1994).

En effet, ce type d'oscillation nécessite deux échelles de temps : le temps lent correspondant à un état d'équilibre local (équilibre sur les temps rapides mais évoluant sur les temps lents) et le temps rapide correspondant aux sauts entre les équilibres locaux (Fig. 2.4). Ce modèle d'oscillation idéalisée peut être facilement mis en équation. En posant $\mu \gg 1$ pour le temps lent et donc $1/\mu \ll 1$ pour le temps rapide, on peut écrire le système dynamique à deux dimensions :

$$\begin{aligned}\partial_t x &= \mu [y - F(x)], \\ \partial_t y &= -\frac{1}{\mu}x.\end{aligned}$$

Ceci revient à dire que sur les temps rapides, $y=F(x)$. Néanmoins, sur les temps lents, y évolue en fonction du signe de x . En d'autres termes, $y=F(x)$ définit les équilibres locaux, c'est-à-dire les équilibres sur les temps rapides. Et y évolue sur les temps lents en vérifiant que $y=F(x)$ jusqu'à ce que cette dernière ne puisse être vérifiée de nouveau pour cette valeur de y . Alors un saut rapide apparaît, correspondant à une évolution de x sur les temps rapides afin de vérifier de nouveau $y=F(x)$ et de retrouver ainsi un nouvel équilibre local (Fig. 2.4).

Ce modèle idéalisé d'oscillation peut être appliqué à l'oscillation millénaire. Par contre, l'asymétrie intrinsèque à notre système ne permet plus, a priori, d'utiliser une fonction $F(x)$ symétrique en x . Ceci est vérifié par l'absence de fortes propriétés de symétrie entre les équilibres locaux de l'oscillation millénaire. Une conséquence est qu'au cours d'un cycle d'oscillation, à la différence du modèle idéalisé, le système ne s'attarde pas autant de temps sur les deux équilibres locaux.

Les deux phases lentes sont très proches des propriétés thermiques et halines des états d'équilibres (Fig. 2.2). Les phases ressemblant respectivement à l'état d'équilibre thermique et halin seront appelées phases thermique et haline. La phase haline voit croître lentement la température moyenne à cause de l'advection et de la diffusion des eaux chaudes tropicales de surface vers les profondeurs de l'océan.

L'une des phases rapides, l'évolution de la phase thermique vers la phase haline, se fait par une instabilité de la salinité *via* le transport de sel. Cette instabilité peut se présenter sous deux formes : une oscillation centenaire croissante dominée par la salinité (chapitre 1) ou la rétroaction positive du sel (Marotzke, 1996). Pour ces deux instabilités, la croissance d'une perturbation de sel apparaît par le terme d'advection par les perturbations de la salinité moyenne. Toutefois, pour la première, c'est l'advection par la circulation moyenne des perturbations de sel qui domine le transport de sel, ce qui introduit une oscillation à l'instabilité. C'est pourquoi, suivant le régime de forçage, par exemple en augmentant l'intensité du flux d'eau douce, nous observerons le mode de déstabilisation du régime thermique évoluer d'une oscillation centenaire croissante à une croissance pure, comme

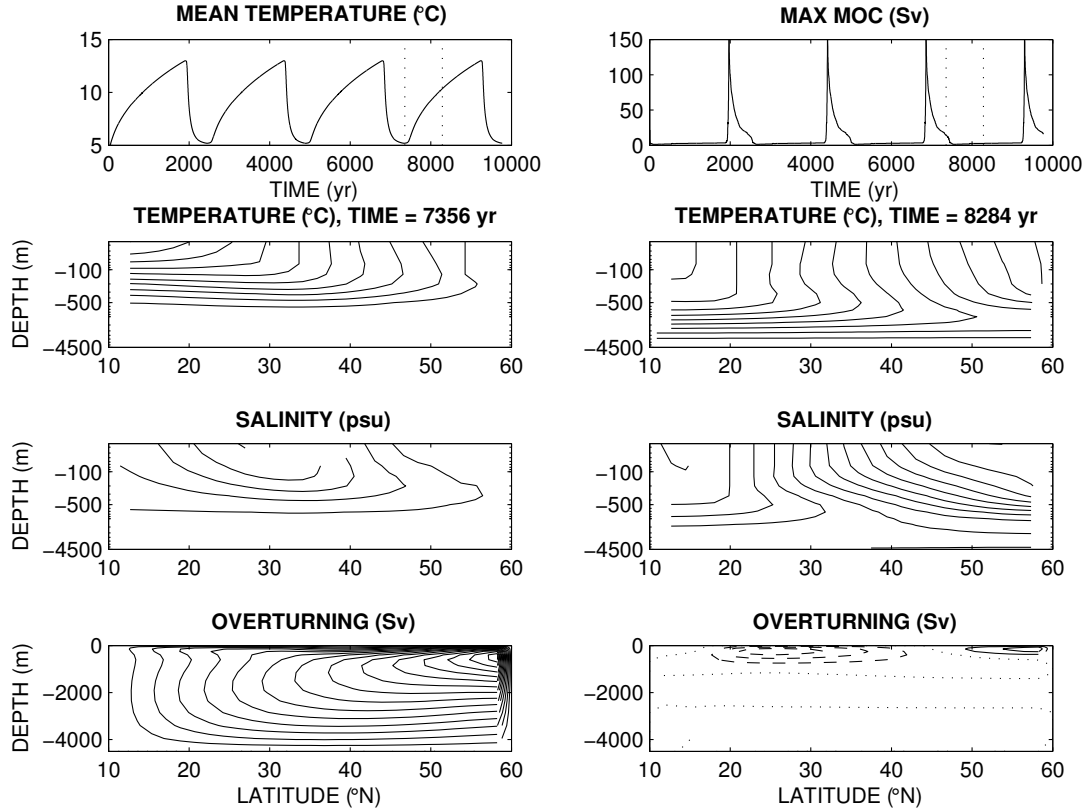


FIG. 2.2 – Intégration temporelle du modèle 2-D pour une intensité du flux d'eau douce de 105 m yr^{-1} . L'évolution de la température moyennée sur le bassin (en haut à gauche) se déroule en deux phases : un refroidissement de l'océan suivi d'un réchauffement plus lent. Le maximum de circulation (en haut à droite) montre ces deux mêmes phases, correspondant respectivement à une cellule de circulation négative et positive, séparées par un pic de circulation positive à la fin du refroidissement. Les lignes en pointillés indiquent les temps représentés en dessous. À gauche (droite), la température, la salinité et la circulation durant la phase de refroidissement (réchauffement) sont très proches de l'équilibre thermique (halin) : forte stratification sur les 500 (1 000) premiers mètres et un flux de surface vers le nord (sud). Les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent respectivement à des valeurs positives, négatives et nulles : l'intervalle des contours est de 2°C , 0.5 psu et 1 Sv de (à gauche) 4 à 24°C , 35 à 37 psu et 0 à 15 Sv ; (à droite) 4 à 25°C , 31 à 37 psu et -4 à 3 Sv .

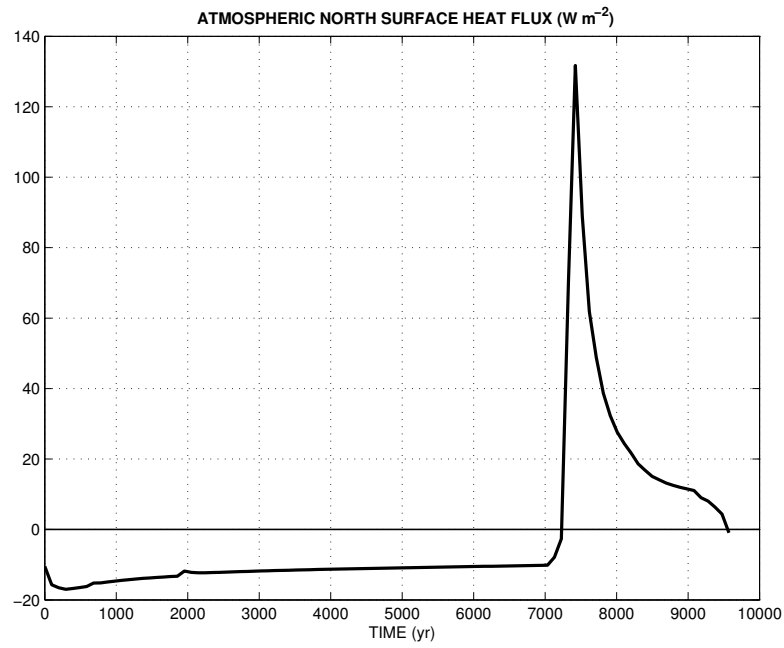


FIG. 2.3 – Flux de chaleur vers l’atmosphère dans les régions du nord (entre 49°N et 60°N) durant un cycle de l’oscillation millénaire ($F_0=1.05 \text{ m yr}^{-1}$). La phase thermique réchauffe l’atmosphère dans les régions du nord alors que la phase haline y entraîne un refroidissement.

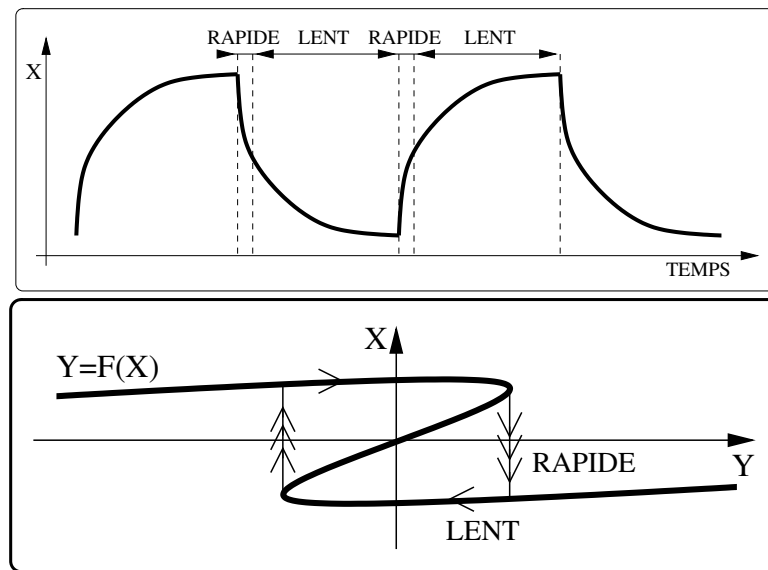


FIG. 2.4 – En haut, évolution schématique variable lors d’une oscillation de relaxation. En bas, la branche correspond aux équilibres locaux ou équilibres sur les temps rapides. Néanmoins, sur les temps lents, il y a une évolution le long des équilibres locaux (flèche simple) jusqu’à leur disparition. Il y a alors un saut sur un temps rapide vers un autre équilibre local (flèche triple).

décrit dans le chapitre 1.

L’évolution de la phase haline vers la phase thermique n’est pas encore clairement décrite. Une hypothèse est la possible réactivation de la convection au nord du bassin due au réchauffement de l’océan profond entraînant une instabilité statique. Ainsi, la réactivation de la convection permettrait la réémergence de la phase thermique. Or, puisque l’eau de fond est plus chaude que l’eau de surface au nord, le mélange convectif induit un réchauffement de l’eau de surface. Le rappel de la température de surface sur la température atmosphérique entraînerait une forte et rapide déperdition de la chaleur stockée dans l’océan profond vers l’atmosphère. Cependant, des expériences menées sans les termes de convection révèlent l’existence d’oscillations millénaires sans résoudre les instabilités statiques.

Nous allons donc ici proposer une autre approche pour comprendre la réinstallation de la phase thermique ou, autrement dit, l’instabilité de la phase haline. Premièrement, pour de fortes valeurs de l’intensité du flux d’eau douce, les intégrations temporelles révèlent une oscillation autour de la phase haline (Fig. 2.5 à droite). La présence de ce cycle limite paraît une piste intéressante pour expliquer la déstabilisation de la phase haline. Cette variabilité centenaire est dominée par la salinité et se localise dans la zone nord du bassin. Elle peut être décrite comme une anomalie passivement advectée par la cellule positive du nord. Cette oscillation est de plus en plus instable lorsque l’intensité du flux d’eau douce

diminue.

Deuxièmement, durant la phase haline, il existe une augmentation continue du maximum de la fonction courant positive correspondant à l'intensité de circulation de la cellule nord (Fig. 2.6). Ce maximum est fortement augmenté avant la déstabilisation, mais il n'existe aucun indice de cette augmentation sur les gradients de densité méridiens grandes échelles ni sur la température moyenne du bassin. Leurs modifications n'arrivent que dans un second temps, donc comme des conséquences de l'augmentation brutale du maximum de circulation. Ainsi, la convection qui par construction influence les eaux de surface et donc entraînerait obligatoirement une perte de chaleur *via* le terme de rappel, ne peut expliquer le début de la croissance de la circulation positive. Et puisque cette augmentation arrive avant tout changement des gradients méridiens grandes échelles, ce changement ne peut être dû qu'à des modifications locales.

Une instabilité locale de la cellule positive paraît être une bonne explication pour le passage de la phase haline à la phase thermique. Cela est cohérent avec l'oscillation locale présentée plus tôt.

Finalement, au-delà de l'un ou l'autre des mécanismes de réinstallation de la phase thermique, l'apparition d'une circulation positive pousse les eaux chaudes stockées au fond du bassin vers le sud, entraînant un fort gradient méridien de température qui augmente fortement la circulation positive. Cette rétroaction positive explique l'apparition du pic dans le maximum de circulation en fonction du temps (Fig. 2.2 en haut à droite). Cette circulation ramène ensuite les eaux chaudes du sud vers la surface et les transporte ensuite vers le nord, où elles sont soumises au terme de relaxation de température en surface. Dans cette dernière étape, l'océan cède rapidement et énormément de chaleur à l'atmosphère (Fig. 2.2 en haut à gauche).

2.3 Caractérisations des bifurcations

La première caractéristique de l'oscillation millénaire au travers des modifications de l'intensité du flux d'eau douce est l'évolution de sa période (Fig. 2.7). Près de la bifurcation thermique (définie comme la bifurcation entre l'équilibre thermique et l'oscillation millénaire), l'oscillation millénaire a une période qui change en fonction de la distance à la bifurcation. De la même façon, près de la bifurcation haline (définie comme la bifurcation entre l'équilibre halin et l'oscillation millénaire), l'oscillation millénaire a une période qui se modifie en fonction de la distance à la bifurcation. Dans les deux cas, la valeur de la période à la bifurcation tend vers l'infini. Ce type de bifurcation est appelé bifurcation période-infinie. Néanmoins, ces deux bifurcations possèdent des caractéristiques différentes. Pour la bifurcation thermique, la période croît suivant une loi en inverse d'une racine carrée de la distance à la bifurcation (Fig. 2.7) : c'est une loi typique des bifurcations période-infinie. Pour la bifurcation haline, la période suit une loi logarithmique qui est caractéristique d'une bifurcation homocline : cette dernière est une bifurcation particulière des bifurcations période-infinie (Colin de Verdière et al., 2006).

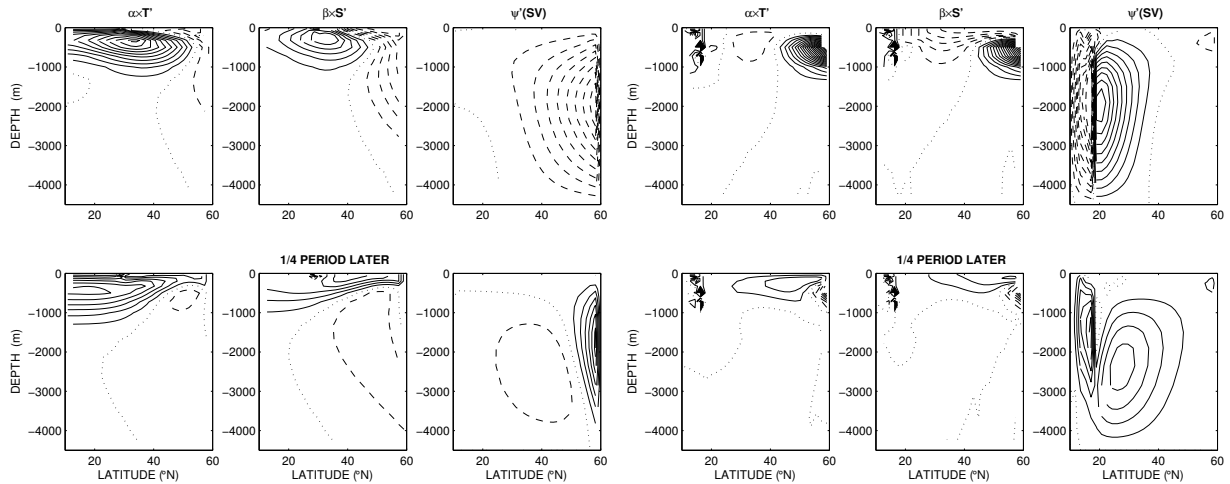


FIG. 2.5 – (gauche) Instantanés des perturbations de la température, salinité (les deux en terme de densité) et cellule de circulation méridienne, à une phase et un quart de période plus tard, de la variabilité plus haute fréquence apparaissant au cours de la bifurcation thermique. (droite) Comme à gauche pour la bifurcation haline. Les périodes de ces oscillations centenaires sont respectivement 187 et 138 yr pour une intensité du flux d'eau douce de 94 et 185 m yr^{-1} . Les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent à des anomalies positives, négatives et nulles : à gauche (droite) l'intervalle des contours est respectivement de 5×10^{-6} (5×10^{-7}) et 0.5 (10^{-2}) Sv.

Comment pouvons-nous interpréter de telles bifurcations période-infinie ? Ou comment pouvons-nous comprendre la croissance de la période d'oscillation lorsque nous nous rapprochons de la bifurcation ? Habituellement, une bifurcation période-infinie est due à un ralentissement de la trajectoire à cause de la rémanence d'un attracteur autour de ce qui peut être appelé le « fantôme » d'un point stable : cet effet est appelé *bottleneck*. En d'autres termes, plus le système est proche de la bifurcation, plus la trajectoire est proche du fantôme du point stable. Donc, plus forte est l'attraction de ce fantôme du point stable et plus lentement la trajectoire passe auprès du fantôme du point stable. À la bifurcation, parce que la trajectoire passe par le point stable, le ralentissement est infini et donc la période de la trajectoire également.

Cet effet *bottleneck* est cohérent avec l'échelle de temps longs définissant l'oscillation de relaxation. En effet, ce que nous venons de définir comme la réminiscence d'un point stable est le même effet que ce qui avait été défini comme l'équilibre local évoluant sur des temps longs. Ici, la trajectoire ne coupe plus l'équilibre thermique ou halin mais, lors de la phase haline ou thermique, elle ressent d'autant plus la présence des équilibres respectifs que le régime est près de la bifurcation.

Pour mieux comprendre ce cycle millénaire et plus particulièrement les deux bifurcations, nous nous proposons de dessiner des projections sur deux dimensions des portraits

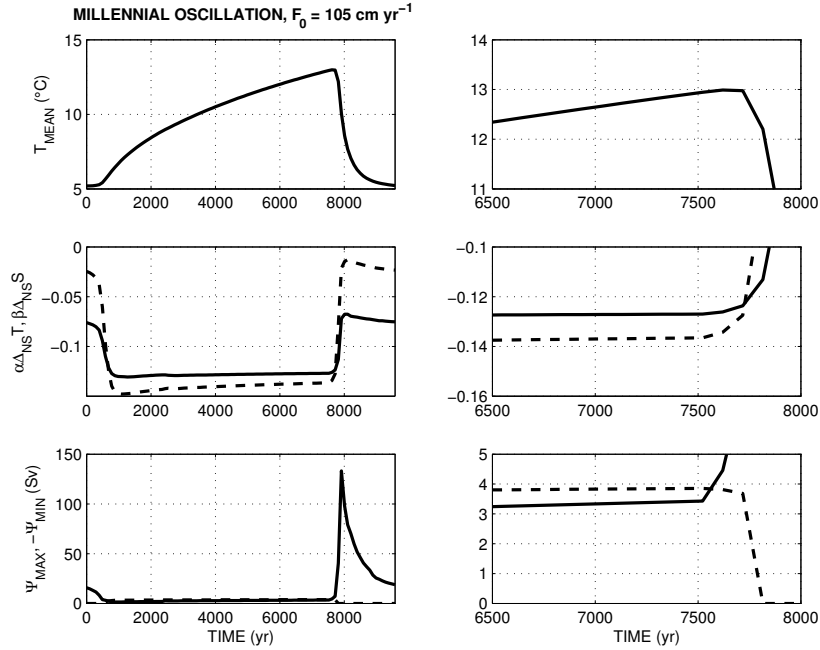


FIG. 2.6 – Une période de l’oscillation millénaire pour une intensité du flux d’eau douce de 105 cm yr^{-1} . En haut (à gauche pour la période – à droite autour de 7 500 yr), la température moyenne du bassin est représentées. Au centre (à gauche pour la période – à droite autour de 7 500 yr), les mesure des gradients méridiens grandes échelles de température (trait plein) et de salinité (tirets) en terme de densité sont représentées comme la différence entre leurs valeurs moyennes au nord (de 10 à 35°N) et au sud (de 35 à 60°N) du bassin sur les 250 premiers mètres. En bas (à gauche pour la période – à droite autour de 7 500 yr), le maximum et le minimum de la fonction courant sont représentés. La lente croissance de la cellule de circulation positive durant la phase haline est fortement augmentée après 7 500 yr. Cette modification devance toutes modifications de l’intensité de la circulation négative, de la température moyenne, ainsi que des mesures des gradients méridiens grandes échelles. Ceci suggère que c’est un effet local qui induit l’augmentation la circulation positive.

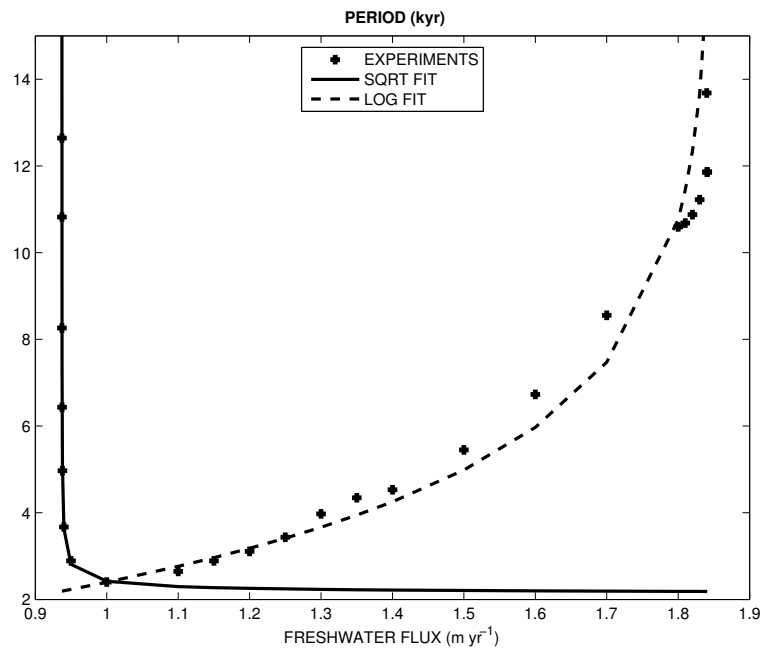


FIG. 2.7 – Période de l'oscillation millénaire fonction de l'intensité du flux d'eau douce. La période devient infinie près des deux bifurcations et suit une loi en inverse de la racine carrée (logarithmique) près de la bifurcation thermique (haline).

de phase de la variable de température moyenne. Ces projections des portraits de phase sont définies comme la dérivée seconde en temps en fonction de la dérivée première, et sont appliquées pour différentes valeurs de l'intensité du flux d'eau douce autour des deux bifurcations. Ces représentations nous permettent de voir comment le cycle se déforme jusqu'à atteindre un état d'équilibre.

2.3.1 Bifurcation thermique

Pour la bifurcation thermique, plusieurs intégrations temporelles sont faites pour différentes valeurs de l'intensité du flux d'eau douce (Fig. 2.8). Il résulte de leur analyse :

- i. L'apparition d'une plus haute fréquence (échelle de temps centenaire) que celle du cycle millénaire autour de l'état d'équilibre thermique et de la phase thermique de l'oscillation millénaire.
- ii. La température moyenne et le maximum de circulation montrent que la croissance de la période est contrôlée par une augmentation du temps passé dans la phase thermique.
- iii. La trajectoire relative au cycle millénaire est toujours présente dans notre gamme d'expériences, mais parfois cette trajectoire passe et s'arrête sur le point zéro ($\partial_t^2 T_{\text{mean}} = \partial_t T_{\text{mean}} = 0$) pour des faibles intensités du flux d'eau douce, signifiant qu'il y a un point fixe stable.
- iv. À la bifurcation, apparaît un cycle limite instable (correspondant à l'oscillation centenaire, Fig. 2.5 à gauche) d'amplitude finie autour du point fixe spiral stable. Ce cycle limite instable définit l'extension du bassin d'attraction de l'équilibre thermique stable.
- vi. Après la bifurcation, il y a coexistence du point fixe spiral stable, définissant l'équilibre thermique ; du cycle limite instable, définissant l'oscillation centenaire ; et du cycle limite stable, définissant l'oscillation millénaire. Au cours du cycle millénaire les trajectoires ralentissent lors de la phase d'oscillation centenaire, comme attendu près d'un cycle limite instable. A ce niveau, suivant les conditions limites, il est possible d'atteindre par une intégration temporelle du modèle non-linéaire le cycle millénaire ou l'équilibre thermique.
- vii. L'augmentation de l'intensité du flux d'eau douce réduit le bassin d'attraction du point fixe spiral stable, en réduisant l'amplitude du cycle limite instable, jusqu'à sa disparition et l'apparition d'un point fixe spiral instable comme attendu pour une bifurcation de Hopf sous-critique.
- viii. Dans un dernier temps, l'augmentation de l'intensité du flux d'eau douce rend de plus en plus instable le point fixe spiral, comme attendu par l'étude du chapitre 1. Après cela, le cycle millénaire ne montre plus de trace d'oscillations rapides

Étant donné ces derniers résultats, l'effet *bottleneck*, expliquant les bifurcations période-infinie, est dû au temps passé autour du cycle limite centenaire. Ici le bassin d'attraction

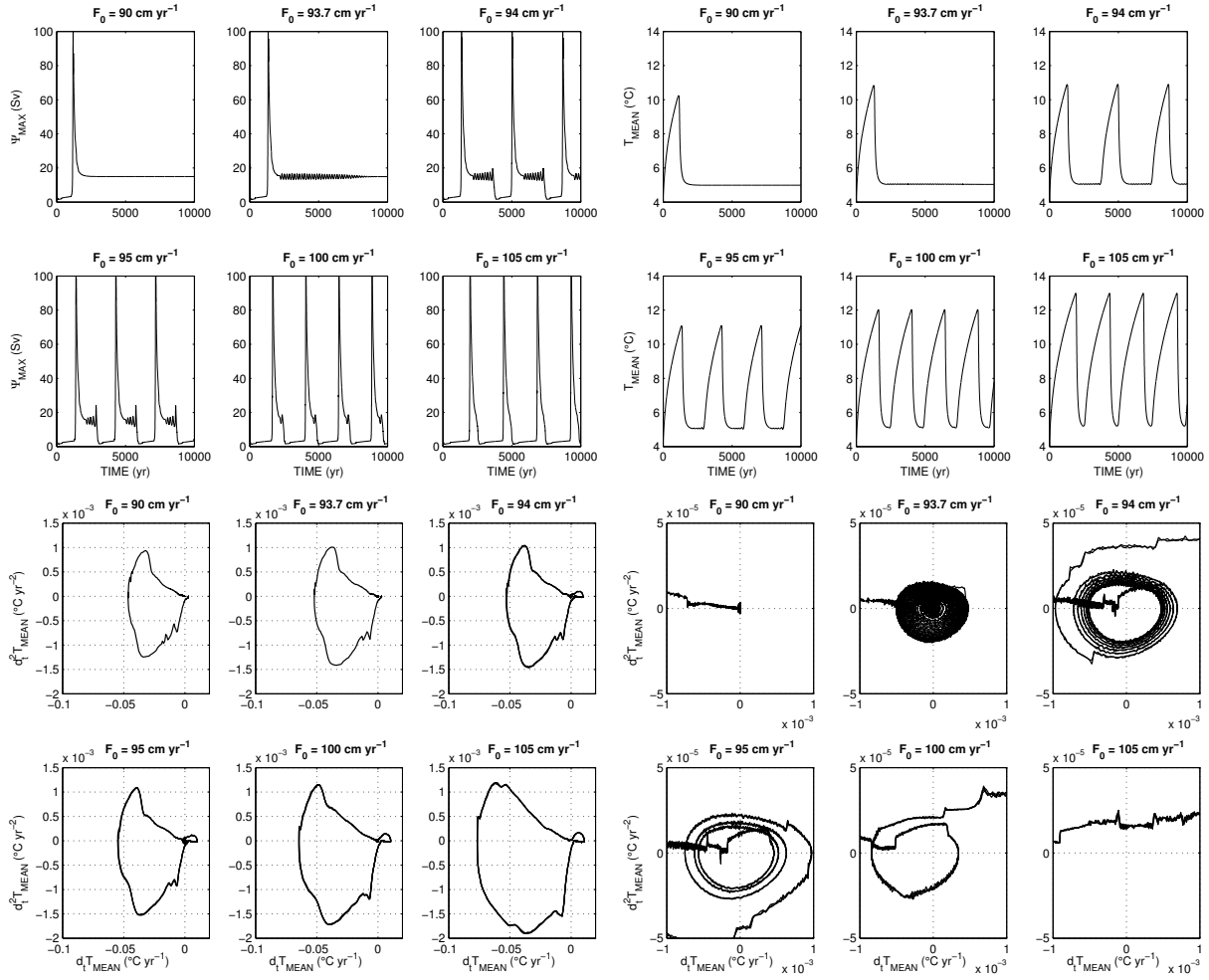


FIG. 2.8 – Intégration temporelle du modèle pour 6 valeurs différentes de l'intensité du flux d'eau douce près de la première bifurcation. Le quadrant supérieur gauche (droit) représente l'intensité de la circulation méridienne (la température moyenne) pour les 6 intégrations temporelles. Le quadrant inférieur gauche (droit) représente une projection du portrait de phase pour le cycle millénaire (pour un gros plan autour du point zéro) pour les 6 intégrations temporelles. L'intensité de la circulation méridienne et la température moyenne montrent l'apparition d'oscillations millénaires et d'une fréquence plus haute autour de l'équilibre thermique et de la phase thermique du cycle millénaire. Les projections des portraits de phase montrent l'apparition d'un cycle limite instable (dû à la haute fréquence) autour d'un point fixe spiral stable. Ce cycle limite borne le bassin d'attraction du point fixe stable et les trajectoires suivent le cycle millénaire. Avec l'augmentation du paramètre de contrôle (intensité du flux d'eau douce) le cycle limite centenaire devient de plus en plus instable.

du point fixe stable est limité par l'apparition du cycle limite instable mais plus nous sommes près de la bifurcation, plus l'attraction de l'équilibre thermique stable est forte et plus la trajectoire passe de temps autour du cycle limite instable (Fig. 2.8). C'est une façon d'obtenir des bifurcations période-infinie. En d'autres termes, l'effet *bottleneck* induit ici un ralentissement et définit le temps lent caractéristique des oscillations de relaxation.

L'analyse des différentes intégrations temporelles de notre modèle non-linéaire PG2D près de la bifurcation thermique, nous permet de construire un diagramme de bifurcation schématisant nos résultats (Fig. 2.9). Cependant, l'utilisation d'intégrations temporelles afin de construire un diagramme ne nous permet pas de nous assurer si un point fixe est instable ou s'il a disparu. En effet, l'intégration temporelle va par définition vers les attracteurs les plus puissants et ne permet d'atteindre que difficilement et succinctement les zones instables. Notre approche n'est pas aussi rigoureuse que l'utilisation de méthodes de continuité (Dijkstra, 2000). Ainsi, le diagramme proposé se veut une synthèse de nos expériences plus qu'un diagramme de bifurcation comme défini dans les théories des systèmes dynamiques. Cette représentation nous permet tout de même de voir que la bifurcation thermique apparaît lors de l'apparition d'un cycle limite instable entourant le point fixe stable et limitant de fait le bassin d'attraction de ce dernier.

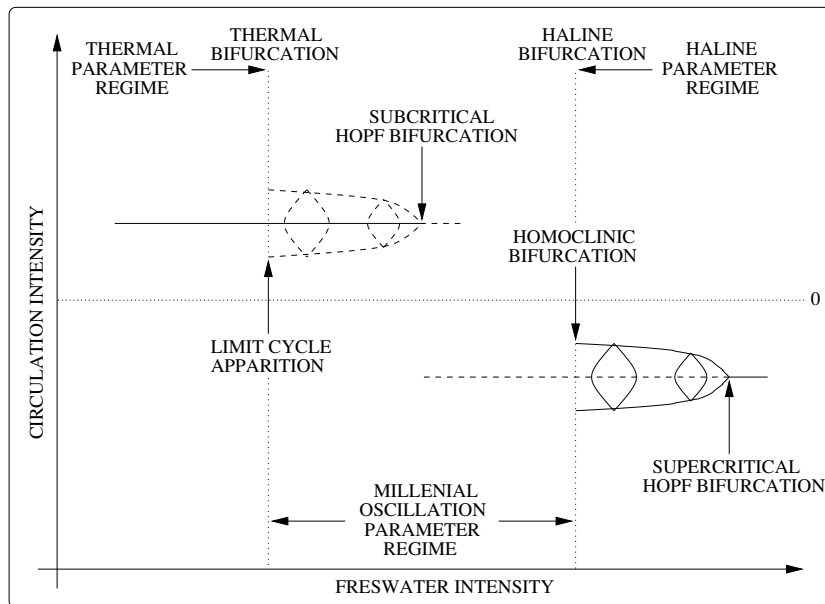


FIG. 2.9 – Diagramme de bifurcation schématisant nos résultats basé sur les intégrations temporelles du modèle PG2D. Les traits (cercles) pleins et les tirets représentent respectivement les états d'équilibre (cycles limites) stables et instables.

2.3.2 Bifurcation haline

Pour la bifurcation haline, l'évolution temporelle de la température moyenne et de l'intensité de la circulation montrent que la croissance de la période près de la seconde bifurcation est due à l'augmentation du temps passé durant la phase haline du cycle millénaire (Fig. 2.10). Quand l'intensité du flux d'eau douce augmente, le cycle millénaire est modifié et au voisinage du point zéro ($\partial_t^2 T_{\text{mean}} = \partial_t T_{\text{mean}} = 0$) un cycle limite apparaît durant la phase haline. Ce cycle correspond à une perturbation dominée par la salinité (Fig. 2.5 à droite). Ce cycle limite instable devient de plus en plus stable quand l'intensité du flux d'eau douce augmente jusqu'à ce qu'il évolue en un cycle limite stable. Cette bifurcation du cycle limite définit la bifurcation du cycle millénaire vers un état halin. Si l'intensité du flux d'eau douce continue d'augmenter, l'amplitude du cycle limite décroît (comme attendu dans les théories des systèmes dynamiques) jusqu'à ce qu'il devienne un point fixe stable.

Comme précédemment pour la bifurcation thermique, notre analyse nous suggère que l'effet *bottleneck* est dû au temps de passage dans la phase haline, c'est-à-dire le temps passé dans le cycle limite instable. Néanmoins, le fantôme n'est plus ici celui du point fixe mais le fantôme du cycle limite. Ainsi, plus nous sommes proche de la bifurcation, plus l'attraction du cycle limite est forte et donc plus le temps passé autour de lui est long (Fig. 2.10). Ce genre de relation entraîne l'apparition de bifurcation période-infinie.

De la même façon que pour l'analyse des intégrations temporelles près de la bifurcation thermique, les différentes intégrations temporelles près de la bifurcation haline nous permettent de compléter le diagramme de bifurcation schématique (Fig. 2.9). Ce diagramme schématique nous suggère que la bifurcation haline apparaît au travers de la déstabilisation du cycle limite entourant l'état d'équilibre halin.

2.3.3 Influence du coefficient de friction linéaire

Afin de généraliser les résultats précédents, de nouvelles intégrations temporelles sont réalisées en utilisant d'autres valeurs pour le coefficient de friction linéaire (Tab. 2.1). En effet, le coefficient de friction linéaire, contrôlant la paramétrisation de la dynamique océanique dans l'approximation 2-D latitude-profondeur, est le moins validé de tous les paramètres. Son utilisation comme paramètre de contrôle nous permet de tester la robustesse d'une telle oscillation millénaire et des mécanismes la contrôlant.

Le premier résultat est que l'oscillation millénaire existe pour différentes valeurs du coefficient de friction linéaire. Le deuxième est que la période évolue en fonction du coefficient de friction linéaire (Fig. 2.11). Le troisième, et certainement le plus important, est que la bifurcation période-infinie thermique disparaît pour de trop fortes valeurs du coefficient de friction linéaire.

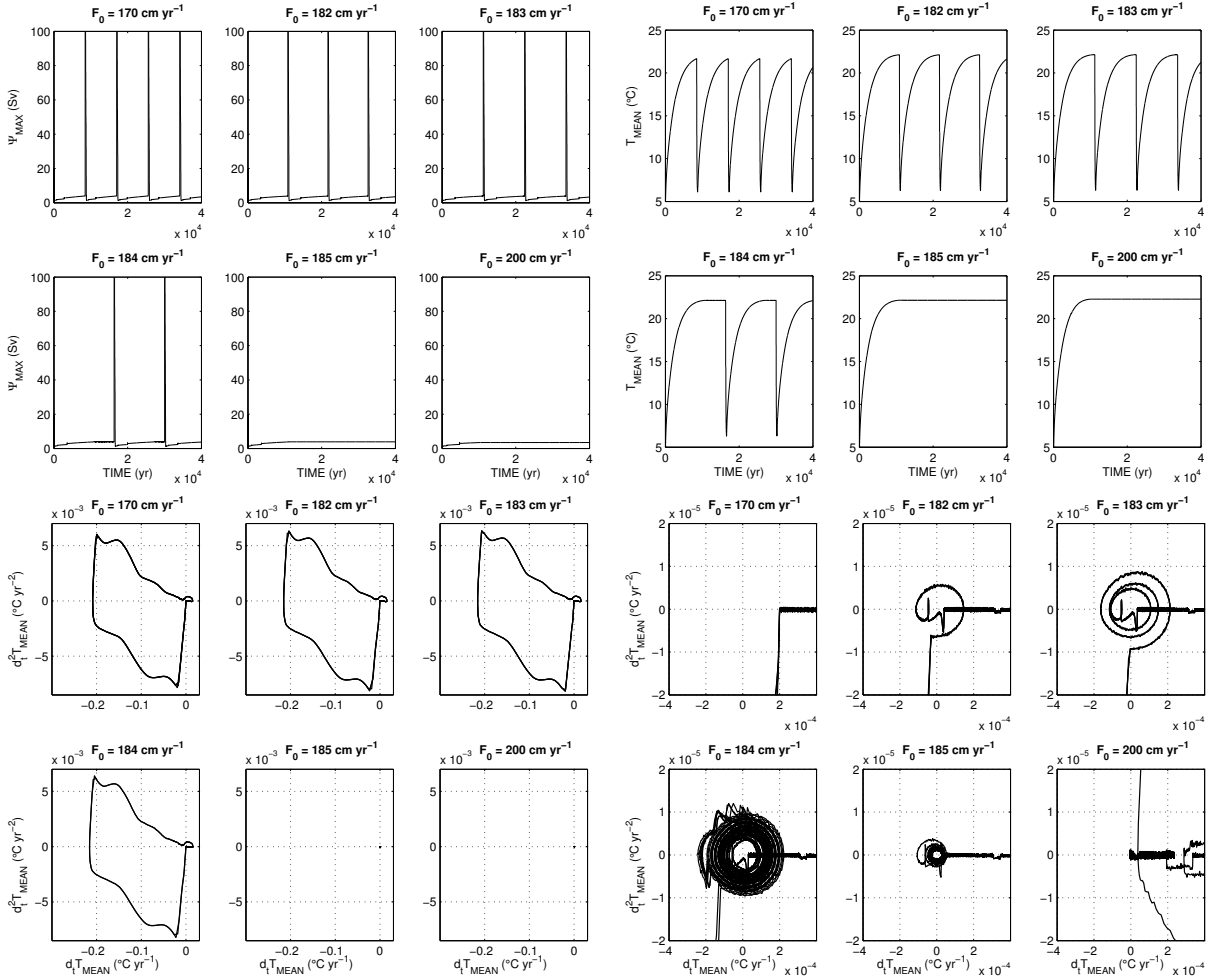


FIG. 2.10 – Intégration temporelle du modèle pour 6 valeurs différentes de l'intensité du flux d'eau douce près de la seconde bifurcation (représentations équivalentes à la Fig. 2.8). Les diagrammes montrent, au travers de la modification de l'intensité du flux d'eau douce, l'apparition d'un cycle limite instable durant la phase haline du cycle millénaire. Ce cycle limite devient de plus en plus stable jusqu'à devenir un cycle limite stable qui lui-même se transforme en un point fixe stable (correspondant à l'état d'équilibre halin) par diminution de son amplitude.

Nous avons montré (chapitre 1 et Sévellec et al., 2006) que le coefficient de friction linéaire et l'intensité du flux d'eau douce ont le même effet sur les oscillations centenaires, en terme de période comme de croissance (voir équations 32 et 33, chapitre 1). Il n'est donc pas surprenant que les modifications du coefficient de friction linéaire, le long d'une faible valeur de l'intensité du flux d'eau douce, fassent apparaître le même genre de bifurcation période-infinie. En effet, comme pour l'intensité du flux d'eau douce, une faible valeur du coefficient de friction linéaire entraîne l'apparition d'un cycle limite centenaire durant la phase thermique. Et c'est sa stabilité qui contrôle la période des oscillations millénaires. Néanmoins, pour de plus fortes valeurs du coefficient de friction linéaire, l'oscillation centenaire ne peut plus exister et donc son cycle limite non plus. La bifurcation thermique n'est alors plus de la forme d'une bifurcation période-infinie.

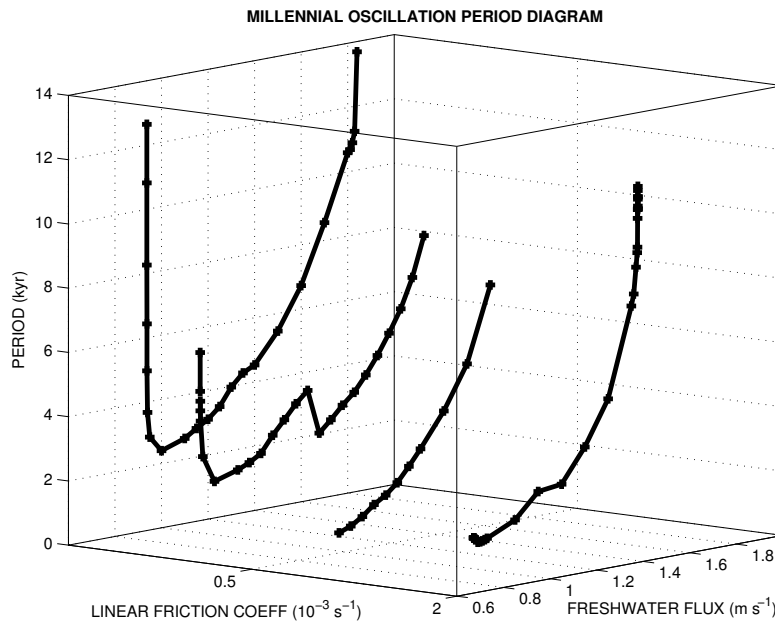


FIG. 2.11 – Période de l'oscillation millénaire fonction de l'intensité du flux d'eau douce et du coefficient de friction linéaire. Le comportement de la première bifurcation est fortement dépendant du coefficient de friction linéaire. Pour les deux séries d'expériences avec de fortes frictions, la première bifurcation n'est plus une bifurcation période-infinie.

2.4 Conclusion

Dans le but de mieux comprendre la stabilité et la variabilité de la circulation thermohaline, nous avons caractérisé les bifurcations occurrentes lors de la modification de l'intensité du flux d'eau douce.

Différents résultats apparaissent dans cette étude. Le premier correspond à l'existence de différents états d'équilibre selon l'intensité du flux d'eau douce ainsi qu'à la présence d'un régime d'oscillations millénaires. Le résultat de Colin de Verdière et al. (2006) sur la présence d'une bifurcation période-infinie entre le régime de l'équilibre halin et le régime de l'oscillation millénaire a été confirmée. Il apparaît que cette bifurcation est contrôlée par l'existence d'un cycle limite centenaire, sa stabilité contrôlant le passage d'un régime à l'autre.

De la même façon, nous avons montré que sous des régimes plus advectifs (friction linéaire plus faible) une bifurcation type période-infinie pouvait surgir entre le régime de l'oscillation millénaire et celui de l'équilibre thermique. Cette dernière bifurcation est caractérisée par la stabilité d'un point fixe spiral : quand ce dernier est stable, nous sommes dans le régime de l'état d'équilibre thermique et à l'inverse, quand celui-ci est instable, nous nous retrouvons dans le régime de l'oscillation millénaire. La présence d'une bifurcation période-infinie est fonction de l'existence ou non d'oscillations autour du point fixe instable. Pour de faibles valeurs du flux d'eau douce (ou du coefficient de friction linéaire) il y a oscillation autour du point fixe thermique instable (chapitre 1) et présence d'une bifurcation infinie. Ce dernier résultat montre que sous certains régimes de paramètres, l'oscillation centenaire est précurseur de l'oscillation millénaire.

Un point central à ces résultats est que, pour les deux bifurcations, il y a présence de hautes fréquences (centenaires) autour de l'état d'équilibre avant que celui-ci ne disparaisse par une bifurcation période-infinie.

Néanmoins, une limite nous apparaît lors de cette étude. L'oscillation millénaire est principalement caractérisée par le passage d'une phase thermique vers une phase haline, or ces deux phases ont des zones de convection radicalement différentes. Le fait que la convection est résolue, dans notre modèle, de façon non-différentiable (utilisation d'une fonction « conditionnelle ») brise la continuité des trajectoires de l'oscillation millénaire dans l'espace des phases. Nous atteignons, alors, la limite de l'approche par les systèmes dynamiques.

La question de l'oscillation centenaire comme précurseur de l'oscillation millénaire entraîne une interrogation. Comme nous l'avons montré dans l'étude du chapitre 1, il ne peut y avoir déstabilisation de la circulation directe pôle-à-pôle par croissance du mode centenaire en deux hémisphères. Que devient alors l'oscillation millénaire ? Est-elle encore possible sans stimulation externe ? Une autre perspective serait d'étendre cette étude à un modèle 3-D afin de mieux représenter la dynamique géostrophique, qui n'est ici que paramétrée, et de voir son impact sur l'oscillation millénaire. Une perspective équivalente serait d'estimer, par l'utilisation d'un modèle global, l'influence de la prise en compte des interactions entre les bassins (courant Circumpolaire) sur l'oscillation millénaire. La question sur la robustesse de la bifurcation haline mérite d'être posée. Dans notre étude celle-ci se déclenche *via* la déstabilisation d'un cycle limite, mais ce cycle est-il physiquement pertinent et robuste ? Existe-t-il dans des modèles de différentes complexités ? Ou est-il ici un artefact de notre modèle permettant la déstabilisation de l'équilibre halin ?

Une étude plus systématique de cette variabilité, qui apparaît comme fondamentale pour la bifurcation, doit être envisagée.

Deuxième partie

Variabilité océanique exogène

Une partie de la variabilité exogène de l'océan est facilement identifiable étant donné notre connaissance de la variabilité du forçage. Nous pouvons citer le cycle journalier dû à la modification de l'ensoleillement au cours de la rotation terrestre ; les cycles de marées dus à la modification de la gravité au cours de la rotation terrestre ainsi que de la rotation de la lune autour de la Terre ; le cycle saisonnier dû au changement d'ensoleillement au cours de la révolution terrestre ; le cycle de Milankovitch dû à la modification de l'ensoleillement au cours de la précession, de l'obliquité et de l'excentricité de l'orbite terrestre.

Ainsi Gildor et Tziperman (2000) montrent la modification du mode interne de Gildor et Tziperman (2001) soumis aux cycles de Milankovitch. Ce processus est non-linéaire puisque le mode de Gildor et Tziperman (2001) l'était. De la même façon, la forte stimulation par un bruit stochastique du flux d'évaporation-précipitation, proposée par Weaver et al. (1993), induit de la variabilité. Cette variabilité, apparaissant dans un modèle de circulation océanique générale en bassin idéalisé rectangulaire, est non-linéaire. En effet, elle prend la forme d'une oscillation de relaxation multi-centenaire avec présence d'oscillations décennales. Néanmoins, l'étude de variabilité exogène, à la différence de l'étude de variabilité endogène, permet dans certains cas de se cantonner à une étude linéaire.

À l'image des études de Tziperman et Ioannou (2002) ainsi que Zanna et Tziperman (2005), si nous nous plaçons sur un état d'équilibre stable et si la stimulation extérieure reste suffisamment faible, nous restons au voisinage de l'état d'équilibre. Alors, sous ces contraintes, l'approximation linéaire est valide. Ces deux études permettent de trouver les croissances en temps fini optimales de la circulation océanique. La première étude se fait dans un modèle à trois boîtes du type de Stommel (1961). La deuxième se fait dans un modèle en moyenne zonale à deux niveaux de profondeur couplé à un modèle atmosphérique. Ces croissances en temps fini sont induites par la réponse non-normale du système linéaire.

Ainsi, une perturbation peut voir une de ces mesures croître dans un temps fini, avant de s'amortir, bien que le système soit asymptotiquement stable (Fig. 2.12). Ce phénomène de croissance en temps fini peut être aisément interprété en prenant un système stable à deux dimensions non-orthogonal. La mesure que nous regardons correspond à la norme d'une combinaison linéaire des vecteurs définissant chacune des dimensions. Si les deux directions ne décroissent pas à la même vitesse, la norme de la combinaison linéaire peut croître de manière transitoire (Fig. 2.12). De plus, puisque la non-normalité d'un système linéaire ne peut en aucun cas être isolée ni négligée, lorsque nous parlons de dynamique linéaire il faut comprendre dynamique linéaire non-normale, notamment pour l'étude de la circulation thermohaline comme le montre le travail de Lohmann et Schneider (1999) dans un modèle à deux boîtes. Cette propriété de non-normalité est la pierre angulaire de la variabilité exogène explicitée dans notre travail.

Afin d'évaluer la variabilité exogène engendrée par les modifications du flux d'eau douce, nous nous proposons de mettre en place une étude systématique. Pour chacune de nos études nous rechercherons la perturbation de salinité de surface optimale, c'est-à-dire la perturbation induisant la plus grande réponse de la circulation océanique. De cette

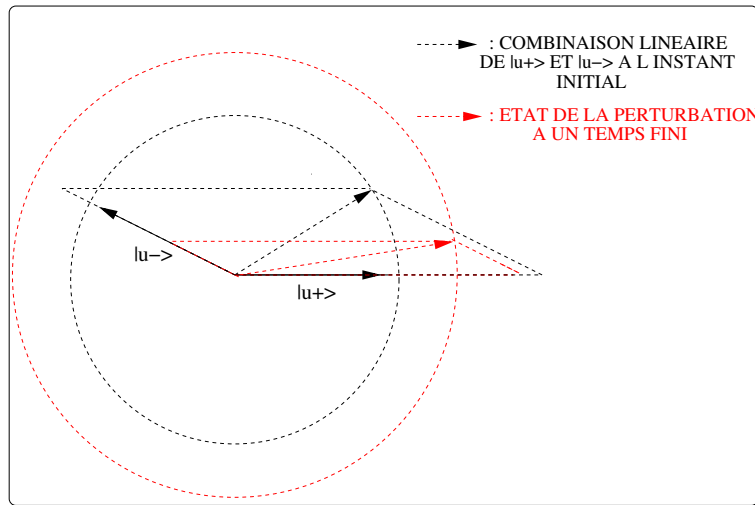


FIG. 2.12 – Croissance en temps fini d'un système linéaire stable à deux dimensions. $|u-\rangle$ décroissant plus vite que $|u+\rangle$, la norme d'une de leur combinaison linéaire peut croître temporairement.

façon nous pourrions calculer la perturbation initiale induisant la plus grande modification de la circulation en temps fini, ou la perturbation constante induisant la plus grande modification permanente de la circulation, ou encore la perturbation stochastique induisant la plus grande variance de la circulation. Nous étudierons ensuite les mécanismes de variabilités induites par ces perturbations optimales.

Cette partie s'articulera en trois axes. Le premier (chapitre 3) présente la méthode et son application à une étude de l'impact de la salinité de surface sur la circulation thermohaline dans un modèle à deux dimensions latitude-profondeur. Deux mesures de la circulation thermohaline seront testées pour établir les perturbations optimales de salinité de surface influençant le plus la circulation. Les perturbations seront soit ponctuelles et induisant une croissance de la circulation en temps fini, soit constantes et induisant une modification permanente de la circulation, soit stochastiques et induisant une variance de la circulation.

Le deuxième axe (chapitre 4) étendra cette étude, dans un modèle planétaire-géostrophique à trois dimensions, à l'étude de la variabilité induite par les perturbations optimales (ponctuelles ou stochastiques) en fonction des conditions limites de surface. Deux cas seront présentés : le forçage dit en flux, avec flux de température et flux d'eau douce à la surface, et le forçage dit mixte, avec rappel de la température et flux d'eau douce à la surface.

Enfin dans le troisième axe (chapitre 5), nous nous intéresserons aux perturbations initiales optimales de la salinité de surface influençant le plus fortement la circulation océanique. Pour évaluer l'influence, deux mesures de la circulation seront choisies pour leur signification globale de la contribution océanique au climat. Ces mesures sont l'intensité de la cellule de circulation méridienne et l'intensité du transport de chaleur méridien.

Cette étude sera effectuée sur un modèle aux équations primitives (OPA) en configuration globale.

Chapitre 3

Perturbations optimales de la salinité de surface influençant la circulation thermohaline

Les perturbations optimales de la salinité de surface influençant le maximum de la circulation méridienne sont obtenues et interprétées autour d'un état d'équilibre stable d'un modèle 2D latitude-profondeur de la circulation thermohaline de l'océan.

Malgré la stabilité de l'état d'équilibre, la non-normalité de la dynamique est capable de générer des croissances en temps fini et de la variabilité au travers de stimulations par les perturbations optimales.

Deux mesures différentes sont comparées pour obtenir les optimaux. L'une est associée à la distance à l'état d'équilibre en terme de densité, et l'autre est associée à l'intensité de la circulation. Il apparaît que ce type d'analyse d'optimaux est dépendant de la mesure : nous choisirons la seconde mesure pour étudier les mécanismes physiques de variabilité exogène.

La réponse à la perturbation initiale optimale de salinité de surface génère une croissance en temps fini entraînant un maximum de modification de l'intensité de la circulation après 67 yr : l'amplification est liée au vecteur propre linéaire le moins amorti oscillant sur une période de 150 yr.

La perturbation constante optimale du flux de salinité de surface est aussi obtenue, et confirme l'idée que la décroissance de l'amplitude du flux d'eau douce accroît l'intensité de la circulation.

Enfin, l'étude de la perturbation stochastique optimale du flux de salinité de surface montre que la variance de l'intensité de la circulation est contrôlée par le mode faiblement amorti oscillant à 150 yr.

Deux résultats analytiques sont testés afin de considérer l'extension de telles études à des modèles 3D plus réalistes : des solutions explicites (en opposition à des problèmes aux valeurs propres) sont trouvées pour la mesure de l'intensité de la circulation (sauf pour

l'optimal stochastique) ; une méthode de troncature sur une somme restreinte des principaux vecteurs propres permet d'obtenir les perturbations optimales pour des analyses sur des échelles de temps longues.

Optimal surface salinity perturbations influencing the thermohaline circulation

FLORIAN SÉVELLEC*, MAHDI BEN JELLOUL AND THIERRY HUCK

Laboratoire de Physique des Océans, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France

accepted by Journal of Physical Oceanography, 22 March, 2007

**Corresponding author address:* Laboratoire d’Océanographie et du Climat : Expérimentation
et Approches Numériques (UMR 7159 CNRS IRD UPMC MNHN), Institut Pierre Simon Laplace,
case 100, 4 place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05, FRANCE. Phone.: +33 144-274157 – Fax: +33
144-273805 – email: florian.sevellec@locean-ipsl.upmc.fr

Abstract

Optimal surface salinity perturbations influencing the meridional overturning circulation maximum are exhibited and interpreted on a stable steady state of a 2D latitude-depth ocean thermohaline circulation model. In spite of the stability of the steady state the non-normality of the dynamics is able to create some transient growth and variability through stimulation by optimal perturbations. Two different measures are compared to obtain the optimum, one associated with the departure from steady state in terms of density, and the other with the overturning circulation intensity. It is found that such optimal analysis is measure-dependent, hence the latter measure is chosen for studying the following physical mechanisms. The response to the optimal initial sea surface salinity perturbation involves a transient growth mechanism leading to a maximum modification of the circulation intensity after 67 yr: the amplification is linked to the most weakly damped linear eigenmode oscillating on a 150 yr period. Optimal constant surface salinity flux perturbations are also obtained, and confirm that a decrease in the freshwater flux amplitude enhances the circulation intensity. At last, looking for the optimal stochastic surface salinity flux perturbation, it is established that the variance of the circulation intensity is controlled by the weakly damped 150 yr oscillation. Two approaches are tested to consider extending such studies in more realistic 3D models: explicit solutions (vs. eigenvalue problems) are found for the overturning circulation measure (except for the stochastic optimal); a truncation method on a few leading eigenmodes usually provides the optimal perturbations for analyses on long time scales.

1 Introduction

One of the expected consequences of global warming is the modification of the water cycle, one of the main forcing of the ocean thermohaline circulation. Actually freshwater flux have a local influence on the surface salinity and thus on the ocean dynamics: Josey and Marsh (2005) show that sea surface salinity has been modified since the mid-1970s due to an increase of the precipitation in the North Atlantic subpolar gyre. Modification of ocean salinity in the recent decades are also found deeper in the North Atlantic (Curry et al., 2003; Curry and Mauritzen, 2005). These studies point out that the water cycle is the least-understood part of the climate system since the evaporation and precipitation over the ocean have large measurement uncertainties. As the slow component of the climate system, the ocean and more particularly the thermohaline circulation is the best candidate to produce low frequency variability. Given these considerations we will focus in this study on the impact of freshwater flux on the thermohaline circulation.

In the ocean, two paradigms coexist to explain the observed variability: the variability could be endogenous or exogenous. For the first paradigm the variability is due to internal modes as millennial oscillation (*e.g.* Colin de Verdière et al. (2006) relaxation oscillation) or centennial oscillation (*e.g.* Sévellec et al. (2006) nonlinear saturation of a linear growing mode): this theory relies intrinsically on nonlinear effects. The second paradigm is based on the hypotheses of a stable steady state of the ocean circulation and external stimulation needed to sustain the variability: *e.g.* oscillations sustained by stochastic freshwater forcing on centennial (Mysak et al., 1993; Mikolajewicz and Maier-Reimer, 1990) and multidecadal (Griffies and Tziperman, 1995) time scales. Actually due to the nonnormal nature of the ocean dynamics, some perturbations can produce dramatic variability around a steady state although it is stable. Transient amplification of initial perturbations has been analyzed in both the atmospheric (Farrell and Ioannou, 1996) and oceanic (Farrell and Moore, 1992; Moore and Farrell, 1993; Moore et al., 2002) contexts, and more recently for coupled El-

Niño variability (Moore et al., 2003). Our study belongs to this last paradigm, as we will study the variability of the ocean circulation perturbed by a freshwater flux.

Some previous works have been done on the variability of the thermohaline circulation in accordance with this second paradigm. Lohmann and Schneider (1999) investigated optimal initial and stochastic perturbations in Stommel (1961) 2-box model, with applications to initial error growth and predictability. Sirkes and Tziperman (2001) used the adjoint of a 3D primitive equation model to establish the sensitivity of heat transport at 24°N and found an oscillatory mode of centennial time scale with basically the same properties and mechanism than the interdecadal oscillation previously studied in box models (Tziperman et al., 1994; Griffies and Tziperman, 1995). In a 3-box model Tziperman and Ioannou (2002) have analyzed the optimal finite-time growth of a measure defined as the square of the circulation intensity. The mechanism, due to the mixed boundary conditions, corresponds to a rapid decay of the temperature part of the anomaly, initially balanced in terms of density, which induces a salinity-driven circulation anomaly in a finite time before the slower decay of the salinity anomaly. Looking for the optimal stochastic perturbation, these authors found that no peak appears in the frequency range of their analysis in spite of the existence of a linear damped oscillatory mode. In Stommel (1961) 2-box model of the thermohaline circulation, Mu et al. (2004) search the optimal initial condition within a nonlinear approach called conditional nonlinear optimal perturbation (CNOP): the authors show the limit of the linear approximation, and highlight the asymmetry of the advection term in the nonlinear equations. These conclusions are extended within a coupled ocean-atmosphere box model (Sun et al., 2005): furthermore their results suggest that a linear approach is valid for studying weak overturning variations of the present thermohaline circulation. More recently, Zanna and Tziperman (2005) studied the optimal perturbation and analyzed its transient growth in a simple coupled model (a latitude-depth ocean model with 2 levels on the vertical and a 1-layer atmosphere): they find the optimal initial perturbation maximizing some

kind of spatial variance transport after 40 yr. Their amplification mechanism involves the growth of both temperature and salinity perturbations due to the advection by the anomaly circulation.

As a follow-up to these works, we will successively address the response of our non-normal dynamical system to impulsive, then continuous excitations (Farrell and Ioannou, 1996). Hence we look for the optimal pattern of initial surface salinity perturbation, constant freshwater flux and stochastic freshwater flux, impacting the thermohaline circulation, within a linear framework. The evaluation of a perturbation impact requires the definition of a measure of the thermohaline circulation. In contrast with previous works, two different measures will be compared here: one taking into account all the prognostic state variables of the model (temperature and salinity, in terms of density), and a second – more physical and more intuitive to analyze – related to the overturning circulation. Solving for these optimal perturbations leads to maximization problems, whose solutions are exhibited either implicitly through an eigenvalue problem for the first measure, or explicitly for the second. As a first step, numerical applications are computed here in a 2D latitude-depth ocean model to represent the North Atlantic thermohaline circulation: as compared to previous work in box geometry, this model provides significant improvements on the structure of the mean overturning, and the periods of the internal modes are much more robust. Optimal perturbations show an expectable large scale structure that will be discussed in terms of linear and adjoint eigenmodes. The ocean model response to these perturbations will be interpreted in terms of physical processes: for instance, the transient growth mechanism is related here to the positive salinity feedback on the overturning, that is not obvious in the box model results (Tziperman and Ioannou, 2002); furthermore, under optimal stochastic forcing, the period of the least damped eigenmode dominates the power spectrum density, whereas it does not appear in the box model (Tziperman and Ioannou, 2002). Optimal perturbations are also computed through a truncation of the linear and adjoint models to an incomplete sum of

their leading eigenmodes: the method is rather successful and allows to better interpret the optimal perturbations, but especially to consider applications in more realistic models.

The paper is organized as follows. The equations and parameters of the model are described in section 2. The reference stable steady state and its linear stability analysis are discussed in section 3. The description of the two measures, the possible perturbation constraints and the analytical method of maximization are made explicit in section 4. The paper proceeds following the three questions: What is the optimal initial perturbation of the surface salinity which induces the largest variation of the thermohaline circulation (section 5)? What is the optimal constant perturbation of the surface salinity flux which induces the largest variation of the thermohaline circulation (section 6)? What is the optimal stochastic perturbation of the surface salinity flux which induces the largest variation of the thermohaline circulation (section 7)? Conclusions are drawn in section 8.

2 The ocean model

The latitude-depth 2D model (Sévellec et al., 2006) is based on the 3D planetary geostrophic equations in Cartesian coordinates, where the zonal averaging requires some dynamical approximations (Marotzke et al., 1988; Wright and Stocker, 1991; Wright et al., 1995, 1998) – here we use linear friction leading to:

$$-\rho_0^{-1}\partial_y P - \varepsilon v = 0, \quad (1a)$$

$$-\partial_z P - \rho g = 0, \quad (1b)$$

$$\partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (1c)$$

where y is latitude, z is the vertical coordinate, P is the pressure, ρ (ρ_0) is the (reference) density, (v, w) is the velocity, and g the gravity acceleration. The choice of the linear friction coefficient $\varepsilon = 1.45 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ leads to a realistic overturning $\simeq 15 \text{ Sv}$ for a typical North Atlantic thermohaline stratification. This solution corresponds to a very frictional system

where the meridional momentum dynamical balance is between the pressure gradient and the linear friction, as in Stommel (1961) box model.

A linearized equation of state for the seawater is used:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0) + \beta (S - S_0)], \quad (2)$$

where α is the thermal expansion coefficient, T (T_0) is the (reference) temperature, β is the haline contraction coefficient, and S (S_0) is the (reference) salinity.

Only the thermodynamic equations are prognostic:

$$\partial_t T = -J(\psi, T) + K_H \partial_y^2 T + K_V \partial_z^2 T + \mathcal{F}_T, \quad (3a)$$

$$\partial_t S = -J(\psi, S) + K_H \partial_y^2 S + K_V \partial_z^2 S + \mathcal{F}_S, \quad (3b)$$

where J is the Jacobian operator, ψ is the overturning streamfunction defined as $w = \partial_y \psi$ and $v = -\partial_z \psi$, K_H (K_V) is the horizontal (vertical) eddy diffusivity. Convection is not explicitly represented, especially to simplify the linearization: Zhang et al. (1992) as well as Marotzke and Scott (1999) have both suggested that convective adjustment does not matter as crucially for a realistic thermohaline structure in 2D as in 3D since its effect remains efficiently represented through downwelling. Surface boundary conditions for temperature and salinity will differ ("mixed boundary conditions") to take into account the different feedbacks of sea surface temperature (SST) and salinity (SSS) respectively on surface heat and freshwater flux. The surface forcing is then expressed as:

$$\mathcal{F}_T = \tau_T^{-1} [T^*(y) - \text{SST}(y)], \quad (4a)$$

$$\mathcal{F}_S = \frac{S_0}{h} FW, \quad (4b)$$

in the uppermost model level of thickness $h = 50$ m; the restoring surface temperature and the freshwater flux reads:

$$T^*(y) = T_0^* [1 + \cos(\pi(y - y_0)/(y_1 - y_0))], \quad (5a)$$

$$FW(y) = -F_0 \sin[2\pi(y - y_0)/(y_1 - y_0)]. \quad (5b)$$

These equations are solved by using a finite difference formulation (see Table 1 for the model parameters values), on a uniform latitudinal grid but non-uniform vertical grid (15 levels of thickness varying from 50 m at the surface to 550 m at the bottom). No-normal-flow conditions are used on the boundaries, resulting in zero streamfunction, and zero flux conditions are applied to temperature and salinity except at the surface.

TABLE 1: Parameters used for the 2D model time integrations.

n_y	28	number of gridpoints in latitude
n_z	15	number of gridpoints on the vertical
H	4500 m	ocean uniform depth
W	5120 km	zonal basin extent
y_0	10°N	southern boundary position
y_1	60°N	northern boundary position
K_H	$10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	horizontal tracer diffusion
K_V	$10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	vertical tracer diffusion
g	9.8 m s^{-2}	gravity acceleration
ρ_0	1027 kg m^{-3}	reference density
α	$2.2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	thermal expansion coefficient
β	$7.7 \times 10^{-4} \text{ psu}^{-1}$	haline contraction coefficient
τ_T	66 days	temperature restoring time
F_0	75 cm yr^{-1}	freshwater flux intensity
T_0^*	13.5°C	restoring temperature amplitude
ε	$1.45 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	linear friction coefficient

3 Linear stability analysis

We first describe the steady state used in all the following study and the results from its linear stability analysis. Figure 1 (left) shows the temperature, salinity and meridional overturning field in the steady state obtained after a 10,000 yr long time integration of the nonlinear 2D model.

The principle of linear stability analysis is to examine the evolution of a small perturbation near a steady state. The prognostic equations of our model (3) can be written as a general dynamical system:

$$d_t |U\rangle = \mathcal{N}(|U\rangle), \quad (6)$$

where $\mathcal{N}$ is a nonlinear operator and $|U\rangle$ is the state vector consisting of temperature and salinity at every grid points, written as a ket; the associated bra $\langle U|$ is defined through the Euclidian scalar product $\langle U|U\rangle$. Let $|\overline{U}\rangle$ be a steady state, *i.e.* $\mathcal{N}(|\overline{U}\rangle) = 0$, the evolution of the perturbation $|u\rangle = |U\rangle - |\overline{U}\rangle$ by the linearized dynamics is:

$$d_t |u\rangle = \mathbf{A} |u\rangle, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial |U\rangle} \right|_{|\overline{U}\rangle}, \quad (7)$$

where the Jacobian operator $\mathbf{A}$ depends only on the steady state $|\overline{U}\rangle$ (autonomous system).

We can then integrate to get the perturbation time evolution:

$$|u(t)\rangle = \exp(\mathbf{A}t) |u(0)\rangle = \mathbf{M}(t) |u(0)\rangle, \quad (8)$$

where $\mathbf{M}(t)$ is called the propagator.

The Jacobian operator is calculated by linearization of the full model equations, both analytically and numerically (Huck and Vallis, 2001) with identical results. Once the Jacobian operator is computed for our steady state, an eigenanalysis is performed: the spectrum of the eigenvalues and the least damped mode is represented respectively in Figs. 1 and 2. All the eigenvalues have a negative real part, in agreement with a stable steady state obtained through time integration. The presence of complex eigenvalues reveals the existence

of internal oscillatory modes. Actually the least damped eigenmode corresponds to a weakly damped 150 yr oscillation that has been largely studied in Sévellec et al. (2006): for stronger freshwater forcing, the steady state becomes unstable and oscillations appear with a slightly longer period. Sévellec et al. (2006) showed that the period is mainly controlled by the mean flow advection of salt perturbation and the growth is due to the competition between diffusion and salinity perturbation reinforcement at the surface. The sensitivity of this eigenmode characteristics has been tested with various horizontal and vertical resolutions (respectively 14 and 42 points, 10 and 20 levels): its period varies between 140 and 176 yr with similar thermohaline structure, whereas the growth rate increases regularly with increasing resolution, as the Hopf bifurcation threshold slightly changes.

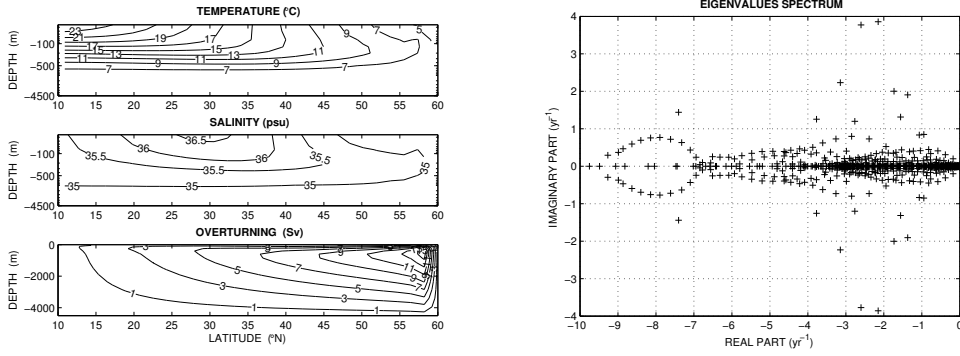


FIGURE 1: (left) Stable steady state of the 2D model: (top) temperature, (middle) salinity (both represented with a logarithmic depth axis) and (bottom) meridional overturning streamfunction (contour intervals are respectively 2°C, 0.5 psu and 2 Sv). (right) The eigenvalues spectrum from the linear stability analysis.

In order to interpret the generalized stability theory, we perform an eigenanalysis of the adjoint (linear transposed) model. As the theory predicts, the spectrum is the same but the eigenvectors are different because of the nonnormality of our linear operator ($\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} \neq 0$, where † denotes the Hermitian operator). The least damped eigenvectors are represented in the right of Fig. 2. The eigenvectors of $\mathbf{A}^\dagger$ are defined as the biorthogonal vectors of the

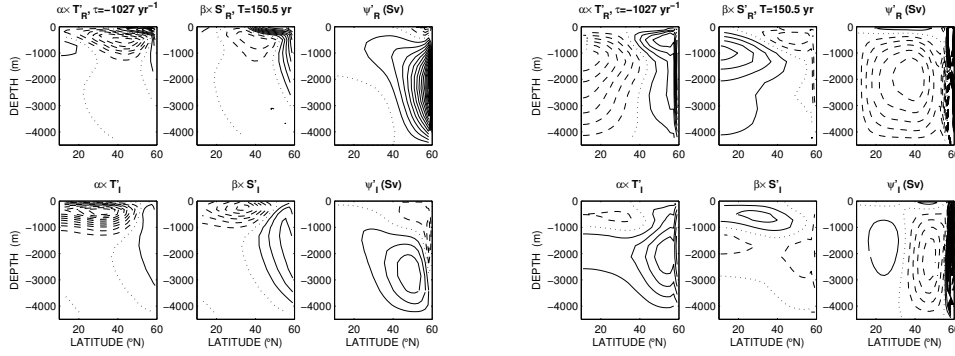


FIGURE 2: The least damped couple of eigenmodes of the (left) tangent linear and (right) adjoint operators (their biorthogonal vectors): temperature and salinity in terms of density, and associated streamfunction. Their common eigenvalues are complex conjugates and the mode represents a 150 yr period oscillation damped on a 1027 yr time scale, evolving from the real part to the imaginary part, and to their opposites. The solid, dashed and dotted lines respectively correspond to positive, negative and zero anomalies: contour intervals are (left) 2.5×10^{-6} and 0.25 Sv, (right) 5×10^{-7} for temperature, 2×10^{-5} for salinity and 2 Sv for streamfunction.

eigenvectors of $\mathbf{A}$. They have two main properties, their eigenvalues are complex conjugate and their contravariant projections are maximum.

4 Maximization method

We now present the method we will use to obtain the different optimal profiles of sea surface salinity, surface salinity flux or stochastic salinity flux, maximizing the meridional overturning circulation intensity or a thermohaline density norm.

We are looking for a vector which under some constraints maximizes some scalar quantity related to the system state. Let $|u\rangle$ be the state vector, $G(|u\rangle)$ the scalar function to be maximized under the n constraints $C_i(|u\rangle) = 0$, for $i = 1 \dots n$. It is then convenient to

introduce the Lagrangian:

$$\mathcal{L}(|u\rangle, \gamma_i) = G(|u\rangle) - \sum_{i=0}^n \gamma_i C_i(|u\rangle), \quad (9)$$

where the γ_i are the Lagrange parameters associated with the constraints.

The state $|u\rangle$ that maximizes G under these constraints verifies

$$d\mathcal{L}(|u\rangle, \gamma_i) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial |u\rangle} d|u\rangle - \sum_{i=0}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_i} d\gamma_i = 0, \quad (10)$$

that is

$$\frac{d\mathcal{L}}{d|u\rangle} = \frac{dG(|u\rangle)}{d|u\rangle} - \sum_{i=0}^n \gamma_i \frac{dC_i(|u\rangle)}{d|u\rangle} = 0, \quad (11a)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\gamma_i} = -C_i(|u\rangle) = 0, \quad \forall i = 1 \dots n. \quad (11b)$$

Solving this maximization problem depends on the kind of scalar function to maximize. In the following we choose two scalar functions appropriate for the physical problem we want to address: a linear function approximating the meridional overturning circulation intensity that we will write $\langle F|u\rangle$, and a quadratic function measuring the thermohaline density norm of the perturbation state $\langle u|\mathbf{S}|u\rangle$, where $\mathbf{S}$ is a diagonal weight matrix that enforces homogeneity. This norm is such that all coordinates of the state perturbation are summed after being rescaled in terms of their squared density and their respective volume (v_i): $\langle u|\mathbf{S}|u\rangle = \sum_i [(\alpha^2 T_i^2 + \beta^2 S_i^2) v_i] / (\sum_i v_i)$; in other words it measures departure from steady state temperature and salinity in terms of density. Since the overturning intensity is the streamfunction maximum that is not a differentiable function of the system state, the maximum is estimated as the mean value of the closest nine grid points to the real maximum value (actually only six of them are nonzero since the maximum of the overturning streamfunction is very close to the northern boundary and it is zero on those grid points to respect the no-normal-flux boundary conditions). Writing successively in matrix form (1b), (1a), ψ as a function of v , and $\psi_{\max}$ as a function of ψ : $|P\rangle = \mathbf{F}_1 |u\rangle$, $|v\rangle = \mathbf{F}_2 |P\rangle$, $|\psi\rangle = \mathbf{F}_3 |v\rangle$, $\psi_{\max} = \langle F_4 | \psi \rangle$, we obtain $\psi_{\max}$ as a linear function of $|u\rangle$, i.e. $\psi_{\max} = \langle F|u\rangle$

with $\langle F | = \langle F_4 | \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1$. The accuracy of the six-point approximation is tested on the steady state and the streamfunction maximum is then underestimated by an amount which does not exceed 15%.

Let us now define the constraints we use. First, we only allow perturbations of surface salinity satisfying salinity conservation. This is coherent with the salt conservation equation of the model, otherwise the trend in the total salt may induce a perpetual drift. This constraint is made implicit by using the projection $|u\rangle = \mathbf{P} |u'\rangle$ where $|u'\rangle$ is a vector of the sub-space of surface salinity conserving salt (dimension n_y-1), and $\mathbf{P}$ is the associated projection operator (dimension $2n_y n_z, n_y-1$): for instance $\mathbf{P}$ is zero everywhere except for one 1 on each line of (n_y-1) surface salinity points for the corresponding surface salinity value, and a full line of (-1) on the remaining surface salinity point. Secondly, since we deal with a linear problem, all the optima are computed up to a multiplicative factor. In order to remove this degeneracy we seek normed perturbations using the weight matrix $\langle u | \mathbf{S} | u \rangle = 1$. The associated constraint is explicitly stated and an associated Lagrange parameter is introduced.

Because the same kind of algebra is used for different investigations, the recurrent Lagrangian is written in the following form: $\mathcal{L}_x^y$, $x \in \{\text{ini}, \text{cst}, \text{sto}\}, y \in \{\text{N}, \text{C}\}$, where the subscript indicates the type of the optimal computed (optimal initial surface salinity perturbation, optimal constant and stochastic surface salinity flux) and the superscript the quantity being maximized (N for the thermohaline density norm and C for the circulation intensity).

5 Optimal initial surface salinity perturbation

In this section, we address our first question: what is the optimal initial perturbation of the sea surface salinity (SSS) that induces the largest variation of the thermohaline circulation? This variation is measured successively in two different manners, through the quadratic thermohaline density norm and the meridional overturning circulation (MOC) intensity.

We first seek the initial SSS perturbation inducing the maximum change within the finite time scale τ in terms of the thermohaline density norm. The Lagrangian is

$$\mathcal{L}_{\text{ini}}^{\text{N}} = \langle u(\tau) | \mathbf{S} | u(\tau) \rangle - \gamma (\langle u(0) | \mathbf{S} | u(0) \rangle - 1), \quad (12)$$

where γ is the Lagrange parameter associated with the norm constraint. The initial surface salinity perturbation vector ($|u(0)\rangle = \mathbf{P} |u'_0\rangle$) must satisfy:

$$d\mathcal{L}_{\text{ini}}^{\text{N}} = d \langle u'_0 | \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau) \mathbf{S} \mathbf{M}(\tau) \mathbf{P} | u'_0 \rangle - \gamma d \langle u'_0 | \mathbf{P}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{P} | u'_0 \rangle = 0, \quad (13)$$

that can be rewritten as an eigenvalue problem:

$$\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}_{\text{ini}}^{\text{N}}(\tau) |u'_0\rangle = \gamma |u'_0\rangle, \quad (14)$$

$$\text{where } \mathbf{N} = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{P} \text{ and } \mathbf{H}_{\text{ini}}^{\text{N}}(\tau) = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau) \mathbf{S} \mathbf{M}(\tau) \mathbf{P}. \quad (15)$$

Note that although $\mathbf{P}$ is rectangular, $\mathbf{S}$ defines a scalar product hence $\mathbf{N}$ is Hermitian and has an inverse. The optimal solution, *i.e.* the surface salinity perturbation inducing the largest finite time growth of the perturbation density norm, corresponds to the eigenmode which associated eigenvalue has the largest real part. The optima were computed in our 2D model for different growth times τ and a local maximum growth appears for $\tau=96$ yr (Fig. 3): its linear time integration reveals nonnormal decay. The initial SSS profile corresponding to this maximum growth and its associated perturbation of temperature, salinity and overturning circulation after 96 yr are shown in Fig. 3.

We now seek the initial SSS perturbation inducing the largest finite time growth of the overturning circulation intensity. The Lagrangian function is now expressed as

$$\mathcal{L}_{\text{ini}}^{\text{C}}(\tau) = \langle F | u(\tau) \rangle - \gamma (\langle u(0) | \mathbf{S} | u(0) \rangle - 1). \quad (16)$$

The optimal SSS perturbation vector must satisfy:

$$d\mathcal{L}_{\text{ini}}^{\text{C}}(\tau) = d \langle F | \mathbf{M}(\tau) \mathbf{P} | u'_0 \rangle - \gamma d \langle u'_0 | \mathbf{P}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{P} | u'_0 \rangle = 0, \quad (17)$$

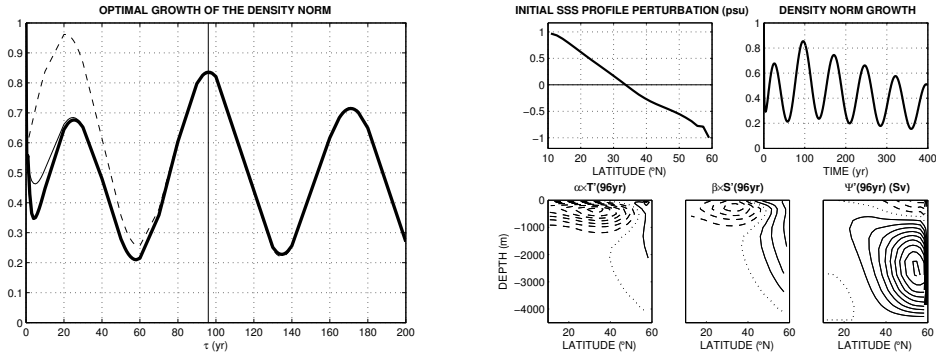


FIGURE 3: (left) Maximum growth of the thermohaline density norm $(\langle u(\tau) | \mathbf{S} | u(\tau) \rangle / \langle u(0) | \mathbf{S} | u(0) \rangle)$ for initial salinity perturbations as a function of growth time τ . The thick, solid and dashed lines correspond respectively to the tangent linear operator, and its truncation to 50 and 2 eigenvectors. The vertical solid line corresponds to the maximal growth at $\tau=96$ yr, detailed on the right: (top) the optimal initial sea surface salinity profile, rescaled for its absolute maximum equals 1 psu; and time evolution of the density norm amplification $(\langle u(t) | \mathbf{S} | u(t) \rangle / \langle u(0) | \mathbf{S} | u(0) \rangle)$ in the linear model integration initialized with the optimal SSS perturbation; (bottom) the temperature, salinity (both scaled in terms of density) and overturning (Sv) perturbation after 96 yr. The solid, dashed and dotted lines respectively correspond to positive, negative and zero anomalies; contour intervals are 2×10^{-5} and 1 Sv.

whose solution can be explicitly written as:

$$|u'_0\rangle = (2\gamma\mathbf{N})^{-1}\mathbf{H}_{\text{ini}}^{\text{C}}(\tau)|F\rangle, \quad (18)$$

$$\text{where } \mathbf{N} = \mathbf{P}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{P}, \quad \mathbf{H}_{\text{ini}}^{\text{C}}(\tau) = \mathbf{P}^\dagger\mathbf{M}^\dagger(\tau), \quad \gamma = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\langle F|\mathbf{H}_{\text{ini}}^{\text{C}\dagger}(\tau)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{H}_{\text{ini}}^{\text{C}}(\tau)|F\rangle}. \quad (19)$$

This optimum is computed for different growth time τ . The largest values of the MOC intensity are obtained for very small τ (Fig. 4), but these short time scales are not relevant in our 2D model and were ignored. Another maximum appears for $\tau=67$ yr which is in the timescale range our model resolves. The transient growth results from both the nonnormality of the ocean dynamics and the quantity to maximize. Actually there exists a measure that is always decaying with time and that can be defined through the eigenmodes of the adjoint model (see below for its explicit formulation).

The optimal initial salinity profile and the corresponding perturbation of temperature, salinity and overturning circulation after 67 yr are similar to those from the thermohaline density norm (Fig. 4). A linear time integration with this dipolar SSS perturbation used for initial condition permits us to describe and understand the mechanisms leading to this strong finite time growth, *i.e.* the increase of the overturning intensity by a factor of 56 after 67 yr. Its physical mechanism is analogous to the one described in Sévellec et al. (2006) and consists in two ingredients. First, any salinity perturbation will be enhanced at the surface by a positive feedback occurring between the salinity forcing and the intensity of the circulation. Secondly, the initial salinity profile induces a reduction of the density meridional gradient which decreases the circulation (1a), and the increase of the circulation only appears when the perturbation gradient reverses after having been advected, that is, after a delay of 67 yr. The conjunction of these two mechanisms explains why this perturbation profile is the most effective to modify the overturning circulation. Moreover, this study enables to determine an upper bound of the impact of SSS perturbation on the overturning circulation: no other 1 psu perturbation could have an impact greater than 7.7 Sv in a linear approximation.

Observed interannual SSS anomalies in the Atlantic reach 0.2 to 0.3 psu in zonal average (Levitus, 1989), for instance within Great Salinity Anomalies (Belkin et al., 1998): our linear model would predict associated changes of the order of 2 Sv in the maximum overturning.

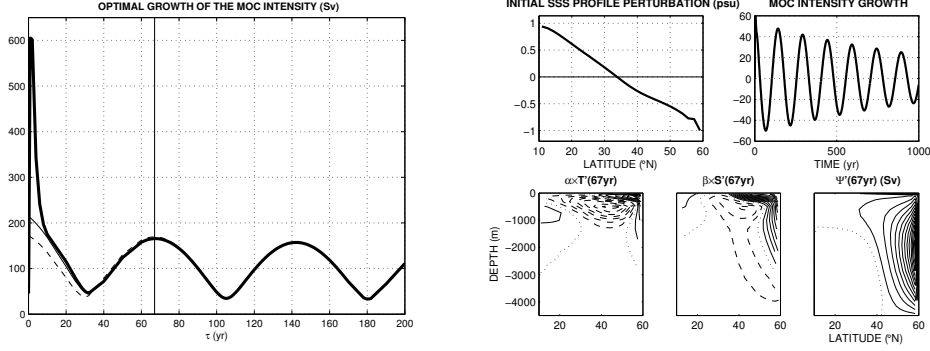


FIGURE 4: As in Fig. 3 for the maximization of the overturning circulation intensity. (left) Optimal MOC intensity ($\langle F|u(\tau) \rangle$) for normalised initial SSS perturbation ($\langle u(0)|\mathbf{S}|u(0) \rangle = 1$); the maximum growth appears at $\tau=67$ yr. (top right) Time evolution of the MOC intensity amplification ($\langle F|u(t) \rangle / \langle F|u(0) \rangle$) in the linear model integration initialized with the optimal SSS perturbation. (bottom right) Contour intervals are 10^{-5} and 2 Sv.

In order to better understand the two last analyses we propose to examine the form of the solution in terms of the eigenmodes of the linearized tangent model, $|u_i\rangle$ (with associated eigenvalues λ_i) and of its adjoint, $|u_i^\dagger\rangle$ (with associated eigenvalues $\lambda_i^\dagger$). Using the property $\lambda_i^\dagger = \lambda_i^*$ (* denotes the complex conjugate) and the normalisation convention $\langle u_i|u_j^\dagger \rangle = \delta_{ij}$ (δ_{ij} is the Kronecker function), we can decompose the two operators $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}^\dagger$ as

$$\mathbf{A} = \sum_i |u_i\rangle \lambda_i \langle u_i^\dagger| \quad \text{and} \quad \mathbf{A}^\dagger = \sum_i |u_i^\dagger\rangle \lambda_i^* \langle u_i|. \quad (20)$$

This very practical notation highlights the importance of each eigenmodes. Removing the projection constraint as a first application, a norm maximization yields an eigenvalue problem like (14): $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}^\dagger(\tau)\mathbf{S}\mathbf{M}(\tau)|u\rangle = \gamma|u\rangle$. Now let us use the always decaying norm briefly introduced previously and its inverse that can be respectively written: $\sum_i |u_i^\dagger\rangle \langle u_i^\dagger|$ and

$\sum_i |u_i\rangle \langle u_i|$. The eigenvalue problem is then:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} |u_i\rangle \langle u_i| \mathbf{M}^\dagger(\tau) |u_j^\dagger\rangle \langle u_j^\dagger| \mathbf{M}(\tau) &= \sum_{ijkl} |u_i\rangle \langle u_i| u_j^\dagger \rangle e^{\lambda_j^* \tau} \langle u_j | u_k^\dagger \rangle \langle u_k^\dagger | u_l \rangle e^{\lambda_l \tau} \langle u_l^\dagger | \\ &= \sum_{ijkl} |u_i\rangle \delta_{ij} e^{\lambda_j^* \tau} \delta_{jk} \delta_{kl} e^{\lambda_l \tau} \langle u_l^\dagger | \\ &= \sum_i |u_i\rangle e^{2\Re(\lambda_i)\tau} \langle u_i^\dagger|. \end{aligned}$$

The choice of this norm leads to an operator with eigenmodes $|u_i\rangle$ and respective eigenvalues $\exp[2\Re(\lambda_i)\tau]$. In this case the eigenvalues problem solution (14) exhibits maximum growth at time $\tau=0$ only, because the steady state is stable hence all λ_i have negative real parts. This computation leads to two results: first, the interest of such a decomposition notation in understanding the maximization problem and, secondly, the existence of a (although physically irrelevant) norm which is always decaying. This last result demonstrates that generalized stability analyses are measure-dependent, and the possible transient growth is only due to the choice of the measure. In the same way, we can rewrite the operators $\mathbf{H}_{\text{ini}}^N(\tau)$ and $\mathbf{H}_{\text{ini}}^C(\tau)$:

$$\mathbf{H}_{\text{ini}}^N(\tau) = \mathbf{P}^\dagger \sum_{ij} e^{(\lambda_i^* + \lambda_j)\tau} |u_i^\dagger\rangle \langle u_i^\dagger| \mathbf{S} |u_j\rangle \langle u_j^\dagger| \mathbf{P}, \quad (21a)$$

$$\mathbf{H}_{\text{ini}}^C(\tau) = \mathbf{P}^\dagger \sum_i |u_i^\dagger\rangle e^{\lambda_i^* \tau} \langle u_i|. \quad (21b)$$

The last two sums reveal that the weight of each eigenmode is controlled by the product $\exp(\lambda_r \tau)$. Because our focus is on long timescales, we can truncate the sum keeping only the leading eigenvalues to represent the linear tangent operator and its transpose. The complete sum corresponds to $N=840$ (discretisation of the salinity and temperature fields yields $N=2n_y n_z$). We now provide the results from truncations to $N=50$ and $N=2$: both truncations correctly reproduce the long timescale results (left panels of Fig. 3 and 4). At the timescales of the maximum growth (96 and 67 yr), the relative error does not exceed 5% for both truncations. In conclusions, only a couple of eigenmodes and their biorthogonal determine here the effect of initial perturbations on long time scales. Consequently, the

finite growth for both the thermohaline density norm and the MOC intensity is determined by the 150 yr oscillatory mode (Fig. 2): the finite time growth is due to the projection of the least damped oscillatory eigenmode of $\mathbf{A}^\dagger$ on the least damped oscillatory eigenmode of $\mathbf{A}$. We verified that the optimal perturbation corresponds to the surface salinity signature of a phase of the biorthogonal of the 150 yr oscillatory mode. Maximum growth appears every 75 yr, which corresponds to the half-period delay between most efficient phases of the perturbation (opposite perturbations yield identical growth).

To confirm these results, we integrate in time the linearized model initialized by the optimal perturbation with varying amplitudes. Moreover to validate *a posteriori* the linear approach, we also conduct a time integration of the nonlinear model initialized by the same optimal perturbations (for both the thermohaline density norm and for the MOC intensity analysis). The optimal growth for the theoretical computation is very close to both the linear and the nonlinear time integration for SSS perturbations up to 0.1 psu (Fig. 5). This last result somehow confirms the validity of our approximations for timescales of the order of a few centuries, and shows the legitimacy range of the linear study. However, we only validate here the growth of our optimal initial SSS, but we do not check if this optimal initial SSS is the optimal perturbation in the nonlinear model (Mu and Zhang, 2006).

6 Optimal constant surface salinity flux

In our way to investigate the response of a stable steady state to a perturbation, we now study a constant surface salinity flux (SSF) perturbation. So we address the second question: what is the optimal constant perturbation of the surface salinity flux which induces the largest variation of the thermohaline circulation? Again we will consider both the thermohaline norm and the meridional overturning intensity. The time evolution of the perturbation now reads:

$$d_t |u\rangle = \mathbf{A} |u\rangle + |f\rangle, \quad (22)$$

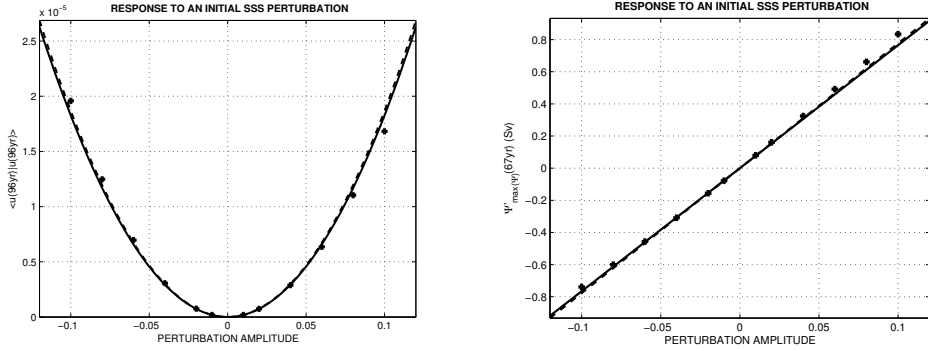


FIGURE 5: Optimal growth of (left) the thermohaline density norm and (right) the overturning circulation intensity, as a function of the initial optimal perturbation amplitude, according to the theoretical computation (solid line), the linear (dashed line) and the nonlinear (crosses) time integrations.

where $|f\rangle$ is the permanent forcing perturbation. After integration, this equation leads to:

$$|u(\tau)\rangle = \mathbf{M}(\tau) |u(0)\rangle + \int_0^\tau ds \mathbf{M}(\tau - s) |f\rangle = \int_0^\tau ds \mathbf{M}(\tau - s) |f\rangle, \quad (23)$$

where we assume, without loss of generality, that the initial perturbation verifies $|u(0)\rangle = 0$ (the optimal initial perturbation is computed in the previous section). The Lagrangian function can then be written

$$\mathcal{L}_{\text{cst}}^N = \langle u(\tau) | \mathbf{S} | u(\tau) \rangle - \gamma (\langle f | \mathbf{S} | f \rangle - 1). \quad (24)$$

Since we are interested in permanent modifications, the algebra is conducted in the limit $\tau \rightarrow \infty$. Using the following notations with $|f\rangle = \mathbf{P} |f'\rangle$:

$$\mathbf{H}_{\text{cst}}^N(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau ds \int_0^\tau ds' \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau - s') \mathbf{S} \mathbf{M}(\tau - s) \mathbf{P}, \quad (25)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{P}, \quad (26)$$

the maximization problem leads to the eigenvalue problem:

$$\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}_{\text{cst}}^N(\infty) |f'\rangle = \gamma |f'\rangle. \quad (27)$$

The eigenmode with the largest real part corresponds to the optimal SSF profile (Fig. 6). The linear temperature, salinity and overturning circulation perturbations in the permanent regime are computed from a linear time integration forced by this profile over 10,000 yr, at which time all the transient growths are damped (Fig. 6).

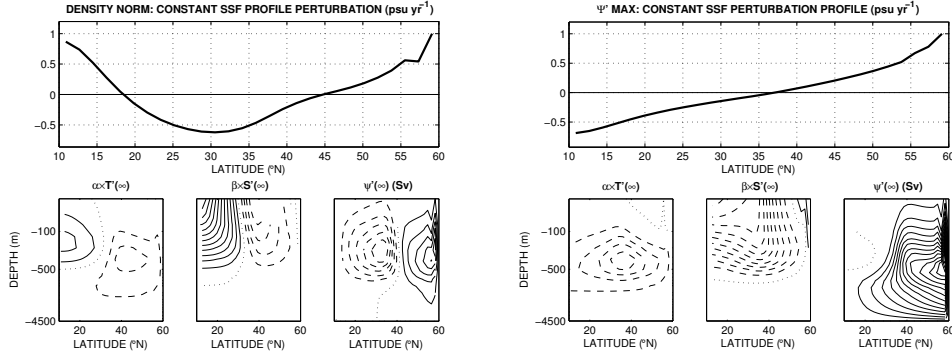


FIGURE 6: (top) Optimal constant surface salinity flux perturbation inducing the largest modification of the thermohaline density norm (left) and the overturning circulation intensity (right) in a stationary regime ($\tau \rightarrow \infty$). Perturbations have been scaled for a maximum absolute value of 1 psu. (bottom) Temperature, salinity (both scaled in terms of density) and overturning (Sv) perturbations after 10,000 yr (stationary regime). The solid, dashed and dotted lines respectively correspond to positive, negative and zero anomalies; contour intervals are 1.5×10^{-4} and 0.5 Sv. A logarithmic scale is used on the vertical.

We now seek the optimal permanent surface salinity flux leading to the largest change of the overturning circulation intensity. The Lagrangian reads:

$$\mathcal{L}_{\text{cst}}^{\text{C}} = \langle F | u(\tau) \rangle - \gamma (\langle f | \mathbf{S} | f \rangle - 1). \quad (28)$$

Using the notation

$$\mathbf{H}_{\text{cst}}^{\text{C}}(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau ds \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau - s), \quad (29)$$

we find

$$\gamma = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{H}_{\text{cst}}^{\text{C} \dagger}(\infty) \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}_{\text{cst}}^{\text{C}}(\infty)}, \quad (30)$$

where $\mathbf{N} = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{P}$. The explicit solution reads $|f'\rangle = (2\gamma \mathbf{N})^{-1} \mathbf{H}_{\text{cst}}^{\text{C}}(\infty) |F\rangle$. The optimal SSF profile, as well as the linear temperature, salinity and overturning circulation perturbations in the permanent regime, strongly differ from the previous norm (Fig. 6). This linear analysis provides an upper bound of the SSF impact on the overturning intensity: a modification of 1 psu yr^{-1} , equivalent to a freshwater flux perturbation of 1.43 m yr^{-1} , leads to a response of 6.5 Sv , impeding the existence of any greater modification. For instance, global warming is expected to increase the hydrological cycle in the order of 4% within the next century (Held and Soden, 2006): such changes would result in our model in a 3 cm yr^{-1} freshwater flux change, hence an impact of the order of 0.14 Sv in the overturning within our linear framework. We understand this perturbation mechanism as follows: the constant SSF counterbalances the salinity forcing of the steady state and so indirectly increases the effect of temperature gradient on the circulation, which is accordingly intensified. As seen in upper left of Fig. 6, the strong local gradient in the north, just at the top of the overturning streamfunction maximum of the steady state, is a very effective way for a perturbation to modify the circulation intensity.

As done before we rewrite the tangent linear operator and its adjoint in terms of their eigenmodes:

$$\mathbf{H}_{\text{cst}}^{\text{N}}(\infty) = \mathbf{P}^\dagger \sum_{ij} \frac{1}{\lambda_i^* \lambda_j} |u_i^\dagger\rangle \langle u_i| \mathbf{S} |u_j\rangle \langle u_j^\dagger| \mathbf{P}, \quad (31a)$$

for the thermohaline density norm and

$$\mathbf{H}_{\text{cst}}^{\text{C}}(\infty) = -\mathbf{P}^\dagger \sum_i \frac{|u_i^\dagger\rangle \langle u_i|}{\lambda_i^*}, \quad (31b)$$

for the maximum overturning circulation function. Note that every eigenmode is weighted by the inverse of its eigenvalue ($1/\lambda$) which is less discriminating than factor $\exp(\lambda\tau)$ derived for the optimal initial perturbation. As one can thus expect, the truncation is a very bad approximation in this context; actually all the eigenmodes have an impact on the solution of the optimal forcing perturbation.

We also compare the theoretical result with the outcome of both linear and nonlinear 10,000 yr long time integrations for varying amplitude perturbations (Fig. 7). The three results are in good agreement for the thermohaline density norm. However a difference appears in the MOC intensity, still though, the relative error remains lower than 12%. This discrepancy may come from the relatively crude approximation we use to estimate the MOC intensity averaged over several gridpoints.

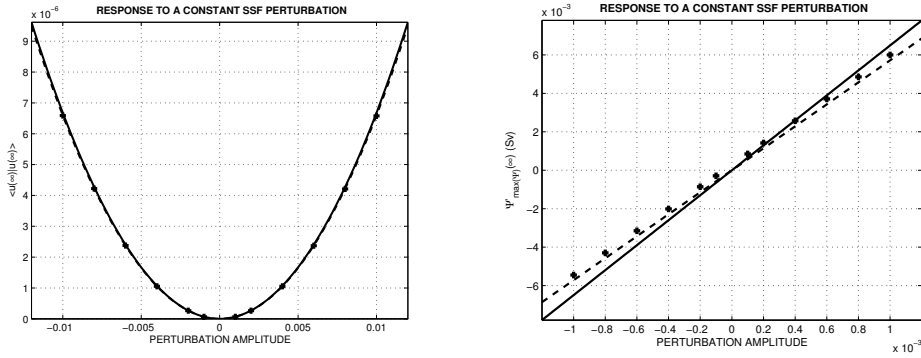


FIGURE 7: As in Fig. 5 for the constant surface salinity flux perturbation. (right) The relative error between the different computations remains lower than 12%.

7 Optimal stochastic surface salinity flux

In the last step of this study, we investigate the influence of stochastic time-dependent perturbations inducing variability around the stable steady state (Farrell and Ioannou, 1993). We thus address the last question: what is the optimal spatial structure of the stochastic surface salinity flux which induces the largest response of the thermohaline circulation in terms of variance? The time evolution of the perturbations now reads:

$$d_t |u(t)\rangle = \mathbf{A} |u(t)\rangle + |f(t)\rangle, \quad (32)$$

where $|f(t)\rangle$ is the stochastic time dependent forcing. The time integration leads to

$$|u(\tau)\rangle = \mathbf{M}(\tau) |u(0)\rangle + \int_0^\tau ds \mathbf{M}(\tau - s) |f(s)\rangle. \quad (33)$$

Without loss of generality, we can assume $|u(0)\rangle = 0$. It is convenient to assume a separable form for the forcing: $|f(t)\rangle = a(t)|g\rangle$, where $a(t)$ is the stochastic part of our perturbation and $|g\rangle$ is the time-independent meridional profile. Since thermohaline circulation timescales are much longer than the atmospheric ones, the forcing variations can reasonably be approximated by a white noise. The autocorrelation function of the stochastic forcing intensity is thus the classical delta function: $E[a(t)a(t')] = \delta(t-t')$, where E denotes the expected value.

We can then rewrite the time perturbation dependency as:

$$|u(\tau)\rangle = \int_0^\tau ds a(s) \mathbf{M}(\tau-s) |g\rangle. \quad (34)$$

We seek the two spatial profiles of the optimal stochastic forcing perturbation that maximize the variance of the state vector, and the variance of the MOC intensity. For the first case, the Lagrangian is:

$$\mathcal{L}_{\text{sto}}^N = \text{Var}(|u(\tau)\rangle) - \gamma (\langle g | \mathbf{S} | g \rangle - 1). \quad (35)$$

The variance of the state vector being norm-dependent, we use as before the thermohaline norm in terms of density:

$$\begin{aligned} \text{Var}(|u(\tau)\rangle) &= E[\langle u(\tau) | \mathbf{S} | u(\tau) \rangle] - \langle E[u(\tau)] | \mathbf{S} | E[u(\tau)] \rangle \\ &= E[\langle u(\tau) | \mathbf{S} | u(\tau) \rangle] \\ &= \langle g | \int_0^\tau ds \int_0^\tau ds' E[a(s)a(s')] \mathbf{M}^\dagger(\tau-s) \mathbf{S} \mathbf{M}(\tau-s') | g \rangle \\ &= \langle g | \int_0^\tau ds \mathbf{M}^\dagger(\tau-s) \mathbf{S} \mathbf{M}(\tau-s) | g \rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

Using the following notations and $|g\rangle = \mathbf{P} |g'\rangle$:

$$\mathbf{H}_{\text{sto}}^N(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau ds \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau-s) \mathbf{S} \mathbf{M}(\tau-s) \mathbf{P}, \quad (37)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{P}, \quad (38)$$

the maximization problem results in the eigenvalue problem:

$$\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}_{\text{sto}}^N(\infty) |g'\rangle = \gamma |g'\rangle. \quad (39)$$

The eigenmode with the largest real part corresponds to the optimal stochastic profile (upper left of Fig. 8): it varies linearly with latitude and conserves the total salt, with the same shape as the ones found for the optimal initial salinity perturbations (section 5). A linear time integration forced by this profile with a white-noise amplitude reveals the variability of the state vector norm as represented in lower left of Fig. 8. The power spectral density of this variability (left of Fig. 9), which is norm dependent, reveals a red noise with a peak around 150 yr: as expected, this spectral peak coincides exactly with the period of the least damped internal mode. To better understand this power spectral density, we compute it analytically (Ioannou, 1995): defining $|\hat{u}(\omega)\rangle$ as the Fourier transform of $|u(t)\rangle$ and $\langle\hat{u}(\omega)|$ its complex conjugate transpose (which is different from the Fourier transform of $\langle u(t)|$), we obtain using (32) the following relation:

$$i\omega |\hat{u}(\omega)\rangle = \mathbf{A} |\hat{u}(\omega)\rangle + |g\rangle, \quad i.e. \quad |\hat{u}(\omega)\rangle = (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} |g\rangle. \quad (40)$$

We are now able to derive the analytical expression of the power spectral density:

$$\text{psd}^N(\omega) = \langle\hat{u}(\omega)| \mathbf{S} |\hat{u}(\omega)\rangle = \langle g| (-i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}^\dagger)^{-1} \mathbf{S} (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} |g\rangle. \quad (41)$$

This theoretical result corresponds exactly to the power spectrum numerically computed from the direct time integration (left of Fig. 9).

Proceeding to the variance of the overturning circulation intensity, the function to maximize becomes:

$$\mathcal{L}_{\text{sto}}^C = \text{Var}(\langle F|u(\tau)\rangle) - \gamma(\langle g|\mathbf{S}|g\rangle - 1). \quad (42)$$

This variance can be rewritten as

$$\begin{aligned} \text{Var}(\langle F|u(\tau)\rangle) &= \text{E}[\langle F|u(\tau)\rangle^2] - \langle F|\text{E}[u(\tau)]\rangle^2 = \text{E}[\langle F|u(\tau)\rangle^2] \\ &= \langle g| \int_0^\tau ds \int_0^\tau ds' \text{E}[a(s)a(s')] \mathbf{M}^\dagger(\tau-s)|F\rangle \langle F|\mathbf{M}(\tau-s')|g\rangle \\ &= \langle g| \int_0^\tau \mathbf{M}^\dagger(\tau-s)|F\rangle \langle F|\mathbf{M}(\tau-s)ds|g\rangle. \end{aligned} \quad (43)$$

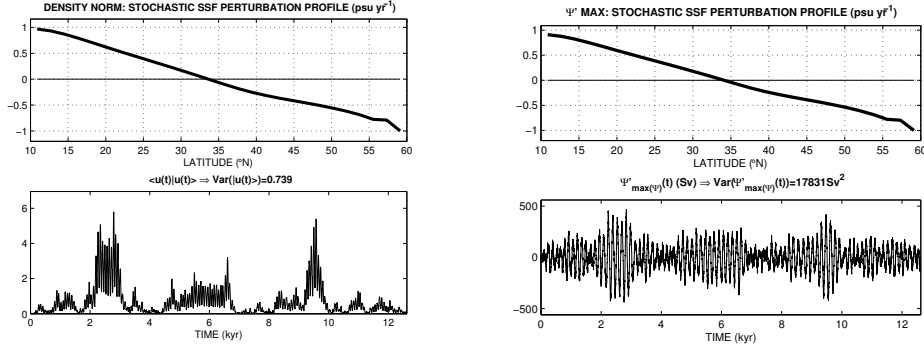


FIGURE 8: (top) Optimal stochastic surface salinity flux perturbation inducing the largest variance (left) defined by the thermohaline density norm, and (right) of the overturning circulation intensity, in a permanent regime ($\tau \rightarrow \infty$). Stochastic perturbations have been scaled such that the standard deviation is 1 psu yr^{-1} . (bottom) Thermohaline density norm and overturning circulation intensity during a linear time integration forced by their respective stochastic optimals.

Using the following notations:

$$\mathbf{H}_{\text{sto}}^{\text{C}}(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau ds \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau - s) |F\rangle \langle F| \mathbf{M}(\tau - s) \mathbf{P}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{P}, \quad (44)$$

the maximization problem reduces to the eigenvalue problem:

$$\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}_{\text{sto}}^{\text{C}}(\infty) |g'\rangle = \gamma |g'\rangle. \quad (45)$$

The optimal stochastic profile is the eigenmode with the largest real part (upper right of Fig. 8) and is identical to the one with the previous norm. This profile is the same as the one for the optimal initial SSS perturbations: it is the most efficient initial structure to provide the largest circulation intensity change; then, when stochastically forced, one can expect it remains the most efficient structure to continuously sustain the largest circulation intensity variability. As verified in a linear time integration (Fig. 8 lower right), the optimal stochastic surface salinity (freshwater) flux profile for a 1 psu yr^{-1} (1.43 m yr^{-1}) standard deviation, induces a standard deviation of 133 Sv: this is the upper bound of the circulation intensity response to stochastic salinity forcing in the linear approximation. Subannual variability of

the freshwater flux zonally-averaged over the Atlantic Ocean may be roughly estimated from atmospheric reanalysis like NCEP or ERA40, it is of the order of 5 cm yr^{-1} in mid-latitudes: this would lead in our model to standard deviation of the overturning intensity of 4.6 Sv.

The power spectral density of this variability (right of Fig. 9) reveals a red noise and a peak around 150 yr, coinciding exactly with the period of the least damped internal mode. As done above, we derive an analytical expression for the power spectral density:

$$\begin{aligned} \text{psd}^C(\omega) &= \langle \hat{u}(\omega) | F \rangle \langle F | \hat{u}(\omega) \rangle, \\ &= \langle g | (-i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}^\dagger)^{-1} | F \rangle \langle F | (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} | g \rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

This theoretical result confirms a peak corresponding to the least damped mode (right of Fig. 8).

Again, it is convenient to rewrite the tangent linear operator and its adjoint in terms of their eigenmodes, leading to the following expressions:

$$\mathbf{H}_{\text{sto}}^N(\infty) = \mathbf{P}^\dagger \sum_{ij} \frac{-1}{\lambda_i^* + \lambda_j} |u_i^\dagger\rangle \langle u_i | \mathbf{S} | u_j \rangle \langle u_j^\dagger | \mathbf{P}, \quad (47a)$$

for the thermohaline density norm and

$$\mathbf{H}_{\text{sto}}^C(\infty) = \mathbf{P}^\dagger \sum_{ij} \frac{-1}{\lambda_i^* + \lambda_j} |u_i^\dagger\rangle \langle u_i | F \rangle \langle F | u_j \rangle \langle u_j^\dagger | \mathbf{P}, \quad (47b)$$

for the overturning circulation intensity. Every couple of eigenmodes is associated with the inverse of their respective eigenvalues sum. When a truncation of the sum to the leading two eigenmodes is performed, the error on the expected variance is only about 5.5% for both density norm and maximum overturning circulation function. Using the same decomposition, the power spectral densities (41) and (46) can be rewritten as:

$$\text{psd}^N(\omega) = \sum_{ij} \langle g | u_j^\dagger \rangle \frac{1}{-i\omega - \lambda_i^*} \langle u_i | \mathbf{S} | u_j \rangle \frac{1}{i\omega - \lambda_j} \langle u_j^\dagger | g \rangle, \quad (48a)$$

$$\text{psd}^C(\omega) = \sum_{ij} \langle g | u_j^\dagger \rangle \frac{1}{-i\omega - \lambda_i^*} \langle u_i | F \rangle \langle F | u_j \rangle \frac{1}{i\omega - \lambda_j} \langle u_j^\dagger | g \rangle, \quad (48b)$$

where we used (40) to establish the useful relation:

$$|\hat{u}(\omega)\rangle = \sum_i |u_i\rangle \frac{1}{i\omega - \lambda_i} \langle u_i^\dagger | g \rangle. \quad (49)$$

These power spectral densities are represented in Fig. 9 for a truncation to 50 and 2 eigenmodes. It appears that the dynamics of the variance are mainly controlled by few eigenmodes; moreover the peak is explained by only 2 eigenmodes corresponding to the weakly damped 150 yr oscillation.

We finally repeat the comparison of the theoretical solution with linear and nonlinear direct time integrations forced by stochastic perturbations of varying amplitude for 12,000 yr (Fig. 10). The three results are in good agreement for the thermohaline density norm. However some differences appear in the overturning circulation intensity but the relative error in standard deviation remains lower than 20%.

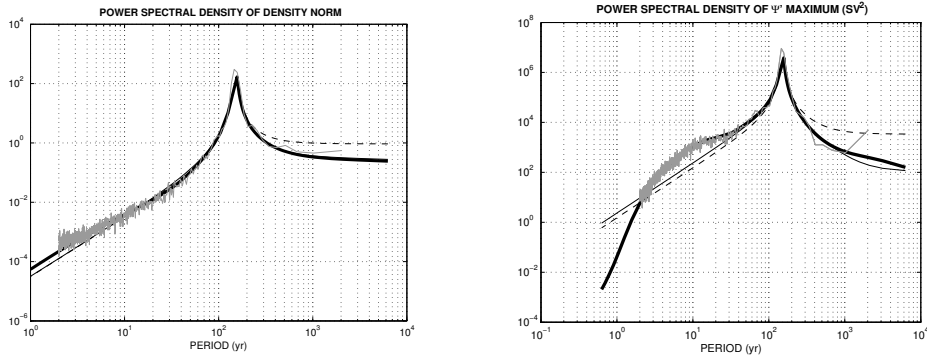


FIGURE 9: Power spectral density (left) defined by the density norm and (right) of the overturning circulation intensity. The theoretical spectrum (thick line) is compared to the truncation at 50 and 2 eigenmodes (respectively solid and dashed line) and to the perturbed linear time integration spectrum (gray line). In both cases the weakly damped 150 yr oscillation eigenmode controls the intensity of the spectrum.

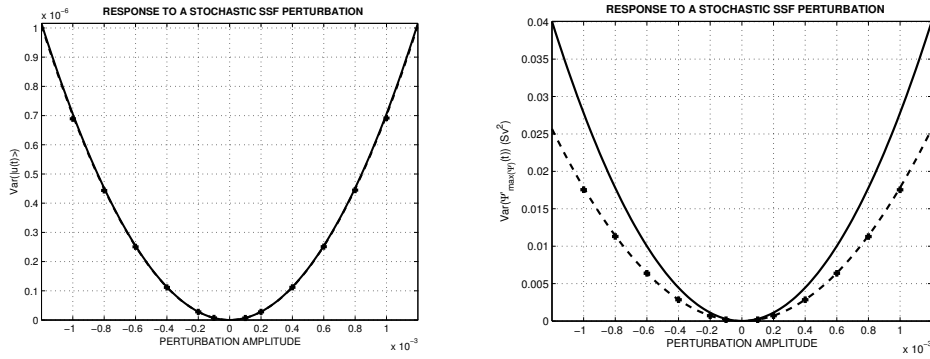


FIGURE 10: As in Fig. 5 for the stochastic surface salinity flux. (right) The relative error in standard deviation between the different computations remains lower than 20%.

8 Conclusion

In the context of the ocean response to climate warming, we investigated the influence of perturbations of sea surface salinity and freshwater flux on the thermohaline circulation, the slow component of the climate system transporting heat poleward. Three types of optimal perturbations are addressed: initial sea surface salinity perturbation, constant and stochastic salinity forcing perturbations. Numerical solutions are found using a 2D latitude-depth model. The solutions provide upper bounds for the amplitude of the thermohaline circulation response.

To evaluate the change of the thermohaline circulation we have compared two measures, a thermohaline density norm and the intensity of the thermohaline circulation. Analytical solutions for the optimal profiles read as an eigenvalue problem in the former case, but an explicit solution for the latter. Although the second measure is not accurately defined, it induces more interesting results because it has more physical meaning for the ocean role in climate than the thermohaline density norm. The optimal response is intrinsically related to the quantity we maximize. Actually the norm based on the eigenvalues of the adjoint model cannot exhibit finite time growth. We stress here that such studies are strongly dependent

on the choice of the measure.

The initial sea surface salinity perturbation maximizing the thermohaline circulation intensity is simply a linear profile with latitude: we found a maximum transient growth after 67 yr due to a positive feedback between surface salinity forcing and advection inducing a reinforcement of salinity perturbation at the surface (Marotzke, 1996). For the salinity forcing perturbation maximizing the same measure, the classical way to modify the circulation is confirmed, *i.e.* a decrease in the amplitude of the freshwater flux enhances the temperature-dominated density gradient and thus increases the circulation intensity. The optimal stochastic salinity forcing perturbation shows the same large-scale structure as the optimal initial SSS perturbation: this result is not inconsistent since this profile, stochastically forced, continuously provides the largest variability of the circulation intensity. This analysis highlights the preponderance of the most weakly damped 150 yr period linear mode to explain the major part of the variability spectrum of the circulation intensity response, and more particularly the apparition of a 150 yr frequency peak. Each of these three analyses of optimal salinity perturbations provides upper bounds for the oceanic response in a linear approximation: a 0.2 psu maximum initial surface salinity perturbation cannot modify the overturning intensity by more than 2 Sv; a 3 cm yr⁻¹ maximum freshwater flux cannot change the overturning by more than 0.14 Sv; a stochastic freshwater flux with 5 cm yr⁻¹ maximum standard deviation induces an overturning intensity standard deviation of 4.6 Sv. Given such observed or expected perturbations of surface salinity and freshwater flux, the variability of the thermohaline circulation in this 2D model appears plausible for upper bounds.

Moreover the first and the third analysis can be largely explained by a few damped eigenmodes provided by the linear and adjoint stability analysis of our reference stable steady state. This approximation has been theoretically computed and numerically confirmed. This last result means that only a finite number of the least damped eigenmodes and their

biorthogonals contributes effectively to the low-frequency variability, which suggests the feasibility of further applications in more realistic models.

The application of the maximization method to this idealized 2D model is seen as a first – methodological – step, that is now being extended to a 3D realistic global model to obtain optimal structures and associated upper bounds of the ocean circulation response. The explicit optimal solutions for the initial and constant forcing perturbations should be specially tractable in more complex models. Another possible extension is to address nonlinear behavior, since several recent papers (Mu et al., 2004; Sun et al., 2005; Mu and Zhang, 2006) suggest that the linear approximation may be a strong limitation in such study: actually, even if the linear evolution of the optimal perturbation is close to its nonlinear evolution for weak perturbations, this does not mean that the optimal pattern found through the tangent linear model is close to the one found with the fully nonlinear model. Finally, dealing with sea surface salinity perturbations may require a better representation of the water cycle through the coupling to atmosphere and ice models: such an implementation can be a very interesting continuation to this work.

Acknowledgments. We thank A. Colin de Verdière and L. Marié for useful discussions. Relevant corrections and suggestions of the anonymous reviewers allowed us to clarify the manuscript.

References

- Belkin, I. S., et al., 1998: Great Salinity Anomalies in the North Atlantic. *Prog. Oceanogr.*, **41**, 1–68.
- Colin de Verdière, A., M. Ben Jelloul, and F. Sévellec, 2006: Bifurcation structure of thermohaline oscillation. *J. Climate*, **19**, 5777–5795.
- Curry, R., B. Dickson, and I. Yashayaev, 2003: A change in freshwater balance of the Atlantic ocean over the past four decades. *Nature*, **426**, 826–829.
- Curry, R. and C. Mauritzen, 2005: Dilution of the northern north Atlantic ocean in recent decades. *Science*, **308**, 1772–1774.
- Farrell, B. and P. J. Ioannou, 1993: Stochastic forcing of perturbation variance in unbounded shear and deformation flows. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 200–211.
- Farrell, B. and A. M. Moore, 1992: An Adjoint Method for Obtaining the Most Rapidly Growing Perturbation to Oceanic Flows. *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 338–349.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou, 1996: Generalized stability theory. Part I: autonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 2025–2040.
- Griffies, S. M. and E. Tziperman, 1995: A linear thermohaline oscillator driven by stochastic atmospheric forcing. *J. Climate*, **8**, 2440–2453.
- Held, I. M. and B. J. Soden, 2006: Robust responses of the hydrological cycle to global warming. *J. Climate*, **19**, 5686–5699.
- Huck, T. and G. K. Vallis, 2001: Linear stability analysis of three-dimensional thermally-driven ocean circulation : application to interdecadal oscillations. *Tellus*, **53A**, 526–545.
- Ioannou, P. J., 1995: Nonnormality increases variance. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1155–1158.

- Josey, S. A. and R. Marsh, 2005: Surface freshwater flux variability and recent freshening of the north Atlantic in the eastern subpolar gyre. *J. Geophys. Res.*, **110**, C05008.
- Levitus, S., 1989: Interpentadal variability of temperature and salinity at intermediate depths of the North Atlantic ocean, 1970-1974 versus 1955-1959. *J. Geophys. Res.*, **94**, 9679–9685.
- Lohmann, G. and J. Schneider, 1999: Dynamics and predictability of Stommel’s box model. A phase-space perspective with implications for decadal climate variability. *Tellus*, **51A**, 326–336.
- Marotzke, J., 1996: Analysis of thermohaline feedbacks. In: Decadal climate variability. Dynamics and predictability, D. L. T. Anderson and J. Willebrand (eds.). NATO ASI Series, Series I, vol. 44, pp. 333–378.
- Marotzke, J. and J. R. Scott, 1999: Convective mixing and the thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **29**, 2962–2970.
- Marotzke, J., P. Welander, and J. Willebrand, 1988: Instability and multiple steady states in a meridional-plane model of the thermohaline circulation. *Tellus*, **40A**, 162–172.
- Mikolajewicz, U. and E. Maier-Reimer, 1990: Internal secular variability in an ocean general circulation model. *Clim. Dyn.*, **4**, 145–156.
- Moore, A. M. and B. F. Farrell, 1993: Rapid perturbation growth on spatially and temporally varying oceanic flows determined using an adjoint method: application to the Gulf Stream. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1682–1702.
- Moore, A. M., C. L. Perez, and J. Zavala-Garay, 2002: A non-normal view of the wind-driven ocean circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **32**, 2681–2705.

- Moore, A. M., et al., 2003: The role of air-sea interaction in controlling the optimal perturbations of low-frequency tropical coupled ocean-atmosphere modes. *J. Climate*, **16**, 951–968.
- Mu, M., L. Sun, and H. A. Dijkstra, 2004: The sensitivity and stability of the ocean's thermohaline circulation to finite amplitude perturbations. *J. Phys. Oceanogr.*, **45**, 2305–2315.
- Mu, M. and Z. Zhang, 2006: Conditional Nonlinear Optimal Perturbations of a Two-Dimensional Quasigeostrophic Model. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 1587–1604.
- Mysak, L. A., T. F. Stocker, and F. Huang, 1993: Century-scale variability in a randomly forced, two-dimensional thermohaline ocean circulation model. *Clim. Dyn.*, **8**, 103–106.
- Sévellec, F., T. Huck, and M. Ben Jelloul, 2006: On the mechanism of centennial thermohaline oscillations. *J. Mar. Res.*, **64**, 355–392.
- Sirkes, Z. and E. Tziperman, 2001: Identifying a damped oscillatory thermohaline mode in a general circulation model using an adjoint model. *J. Phys. Oceanogr.*, **31**, 2297–2305.
- Stommel, H., 1961: Thermohaline convection with stable regimes flow. *Tellus*, **13**, 224–230.
- Sun, L., et al., 2005: Passive mechanism of decadal variation of thermohaline circulation. *J. Geophys. Res.*, **110**, C07 025.
- Tziperman, E. and P. J. Ioannou, 2002: Transient growth and optimal excitation of thermohaline variability. *J. Phys. Oceanogr.*, **32**, 3427–3435.
- Tziperman, E., et al., 1994: Instability of the thermohaline circulation with respect to mixed boundary-conditions: Is it really a problem for realistic models? *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 217–232.

- Wright, D. G. and T. F. Stocker, 1991: A zonally averaged ocean model for thermohaline circulation. Part I: model development and flow dynamics. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1713–1724.
- Wright, D. G., T. F. Stocker, and D. Mercer, 1998: Closures used in zonally averaged ocean models. *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 791–804.
- Wright, D. G., C. B. Vreugdenhil, and T. M. Hughes, 1995: Vorticity dynamics and zonally averaged ocean circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2141–2154.
- Zanna, L. and E. Tziperman, 2005: Nonnormal amplification of the thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **35**, 1593–1605.
- Zhang, S., C. A. Lin, and R. J. Greatbatch, 1992: A thermocline model for ocean-climate studies. *J. Mar. Res.*, **50**, 99–124.

Chapitre 4

Perturbation optimale de la salinité de surface et variabilité multi-décennale

4.1 Introduction

Le chapitre précédent nous a permis de mettre en place une méthodologie qui nous permet d'appréhender l'étude de perturbations optimales de la circulation thermohaline. Nous proposons de continuer dans cette voie en appliquant notre méthode à un modèle 3D plus réaliste : un modèle planétaire-géostrophique.

Ce type de modèle est particulièrement bien adapté à l'apparition de variabilité multi-décennale. Notons tout de même que cette variabilité est fortement dépendante des conditions limites de surface. Un forçage en conditions mixtes se révèle beaucoup plus propice à l'apparition de variabilité qu'un forçage en conditions de flux (Arzel et al., 2006).

Dans la suite de notre travail nous étudierons la variabilité induite par une perturbation initiale ou stochastique sur un état d'équilibre stable. Pour cela, au vu des résultats de Arzel et al. (2006), nous allons mener notre étude sous différents modes de forçage. Nous rechercherons les structures de salinité de surface engendrant le plus de variabilité de la circulation sous conditions mixtes ou en flux.

Notre étude commencera par une présentation du modèle planétaire-géostrophique utilisé, puis de l'état d'équilibre qu'il induit. Une analyse de stabilité linéaire sera faite autour de cet état d'équilibre sous des conditions de forçage mixtes ou en flux. Après cela, nous calculerons la structure des perturbations initiales optimales de la salinité de surface et nous chiffrerons leur variabilité induite. Puis, nous réaliserons la même étude mais dans le cadre d'une perturbation stochastique du flux d'eau douce. Enfin, dans la dernière partie, quelques conclusions et perspectives seront apportées.

4.2 Modèle, état d'équilibre et analyse de stabilité linéaire

4.2.1 Modèle planétaire-géostrophique

Le modèle utilisé est un modèle planétaire-géostrophique 3-D en coordonnées sphériques. Dans ce type de modèle, seules les équations thermodynamiques sont pronostiques, les équations de la dynamique étant diagnostiques. Cette approximation correspond à la limite de l'approximation quasigéostrophique pour des échelles spatiales de l'ordre du rayon de la Terre. Les équations de la dynamique s'écrivent :

$$f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\rho_0^{-1} \nabla_H P - \varepsilon \mathbf{u}, \quad (4.1a)$$

$$-\partial_z P - \rho g = 0, \quad (4.1b)$$

$$\nabla_H \cdot \mathbf{u} + \partial_z w = 0, \quad (4.1c)$$

∇_H représente le gradient horizontal, z la profondeur, f le paramètre de Coriolis, $(\mathbf{u}, w)$ les champs de vitesses horizontales et verticales, P la pression, ρ (ρ_0) la densité (de référence), ε le coefficient de friction linéaire et $\mathbf{k}$ le vecteur unitaire vertical. Pour les équations thermodynamiques on a :

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla_H T + w \partial_z T = K_H \nabla_H^2 T + K_V \partial_z^2 T + \mathcal{C}_T + \mathcal{F}_T \quad (4.2a)$$

$$\partial_t S + \mathbf{u} \cdot \nabla_H S + w \partial_z S = K_H \nabla_H^2 S + K_V \partial_z^2 S + \mathcal{C}_S + \mathcal{F}_S \quad (4.2b)$$

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha T + \beta S) \quad (4.2c)$$

t représente le temps, T la température, S la salinité, K_H (K_V) le coefficient de diffusion horizontale (verticale) des traceurs, α (β) le coefficient d'expansion thermique (de contraction halin), $\mathcal{C}_T$ ($\mathcal{C}_S$) l'impact de l'ajustement convectif sur la température (salinité). L'ajustement convectif est tel que si $\partial_z \rho > 0$, T et S sont mélangés instantanément (sous conservation du contenu de sel et de chaleur) jusqu'à obtenir un profil de densité stable. Le terme $\mathcal{F}_T$ ($\mathcal{F}_S$) est le terme de forçage atmosphérique appliqué à la température (salinité) sur la couche de mélange (h_s), les autres conditions limites interdisent les flux de chaleur et de salinité à travers les frontières. Nous appliquerons pour la salinité un flux de sel en surface, tel que $\mathcal{F}_S = S_0 \text{SSF} / h_s$, avec S_0 la salinité de référence et SSF le flux d'eau douce (conservant le contenu de salinité, Fig. 4.1) correspondant aux flux d'évaporation moins ceux de précipitation.

Pour la température, deux types de forçage seront successivement utilisés et définiront les deux expériences présentées dans la suite de notre travail. La première expérience correspond à une condition de rappel en température, $\mathcal{F}_T = \tau_T^{-1}(\text{SST}_R - \text{SST})$ où τ_T est le temps de rappel et SST_R est la température (de rappel) de surface (Fig. 4.1). Cette expérience nous permet d'atteindre un état d'équilibre stable par intégration temporelle des équations (4.2) et (4.1). La seconde expérience correspond à une condition de flux de

chaleur à la surface, $\mathcal{F}_T = (\rho_0 C_{\rho w} h_s)^{-1} \text{SHF}$ où $C_{\rho w}$ est la capacité calorifique de l'eau de mer et SHF le flux de chaleur en surface (conservant le contenu de chaleur, Fig. 4.1). Le flux est prescrit par la condition de rappel de température à l'équilibre de la première expérience, tel que $\text{SHF} = (\rho_0 C_{\rho w} h_s) \tau_T^{-1} (\text{SST}_R - \text{SST}_{\text{eq}})$ où SST_{eq} est la température de surface à l'équilibre. Puis, de la même façon, nous procédons à une intégration temporelle des équations (4.2) et (4.1). Après ce changement de condition aux limites en surface sur la température, l'état d'équilibre reste le même et reste stable (Fig. 4.1).

Le domaine de notre modèle correspond à une représentation du bassin nord Atlantique. C'est une extension zonale de 64° allant de 10°N à 60°N sur 10 niveaux de profondeur : 100, 150, 200, 250, 300, 400 et 4 fois 500 m. Le premier niveau correspond à la couche de mélange (h_s) et la profondeur totale est uniforme (3 400 m). Les paramètres des intégrations ont été choisis pour que le modèle reste sur le même équilibre stable sous les deux types de forçage (Tab. 4.1).

TAB. 4.1 – Paramètres utilisés pour les intégrations temporelles du modèle planétaire-géostrophique 3D.

n_x	16	nombre de points de résolution sur la longitude
n_y	14	nombre de points de résolution sur la latitude
n_z	10	nombre de points de résolution sur la verticale
H	3400 m	profondeur uniforme du bassin
h_s	100 m	profondeur de la couche de mélange
W	64°	extension zonale du bassin
y_0	10°N	limite sud du bassin
y_1	60°N	limite nord du bassin
K_H	$1.8 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	diffusion horizontale des traceurs
K_V	$10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	diffusion verticale des traceurs
g	9.8 m s^{-2}	accélération de gravité
ρ_0	1000 kg m^{-3}	densité de référence
$C_{\rho w}$	$4000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	capacité calorifique de l'eau de mer
S_0	35 psu	salinité de référence
α	$2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	coefficient d'expansion thermique
β	$8 \times 10^{-4} \text{ psu}^{-1}$	coefficient de contraction haline
τ_T	132 days	temps de rappel de la température
F_0	50 cm yr^{-1}	intensité du flux d'eau douce
ΔT	$(26 - 3)^\circ\text{C}$	amplitude du rappel en température
ε	$3 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$	coefficient de friction linéaire

4.2.2 État d'équilibre

L'état d'équilibre de nos équations correspond à un gradient de la température (salinité) de surface de l'ordre de 20°C (1.5 psu) induisant une circulation méridienne, ayant une intensité de 18 Sv , intensifiée au nord et en surface. Cette circulation correspond à un transport de surface vers le nord et une plongée des eaux le long du bord nord. Une remontée des eaux avec un transport vers le sud apparaît dans le reste du bassin.

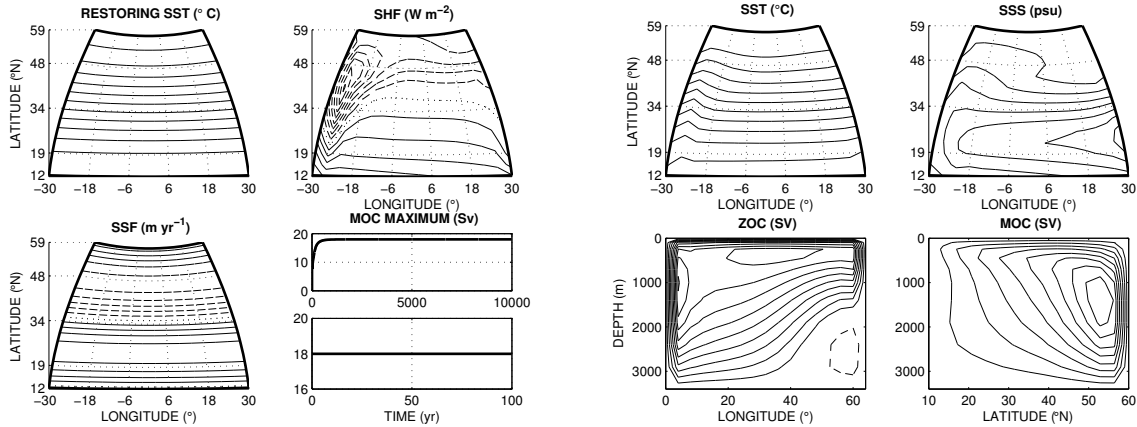


FIG. 4.1 – État d'équilibre du modèle planétaire-géostrophique 3D. À gauche, la température de rappel (*restoring* SST), le flux d'eau douce (SSF) et le flux de chaleur (SHF) diagnostiqué pour l'état d'équilibre obtenu par le rappel de température. Pour ces trois figures, les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent aux valeurs positives, négatives et nulles : les contours vont respectivement de 4 à 26°C par intervalle de 2°C ; de -50 à 40 m yr^{-1} par intervalle de 10 m yr^{-1} ; de -80 à 50 W m^{-2} par intervalle de 10 W m^{-2} . La dernière figure de la moitié gauche correspond à l'évolution de l'intensité de la circulation méridienne pour les expériences avec rappel en température et le *restart* avec flux de chaleur. À droite, représentation de la température et de la salinité de surface (SST et SSS), ainsi que de la circulation zonale et méridienne (ZOC et MOC) à l'équilibre. Pour les quatre figures de droite les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent aux anomalies positives, négatives et nulles : les contours vont respectivement de 4 à 24°C par intervalle de 2°C ; de 34.8 à 36.2 psu par intervalle de 0.2 psu ; de -2 à 18 Sv par intervalle de 1 Sv ; de 0 à 18 Sv par intervalle de 2 Sv .

4.2.3 Analyse de stabilité linéaire

Une analyse de stabilité linéaire est menée sur les deux expériences. Elles ont strictement les mêmes états d'équilibres mais ont des conditions limites de surface sur la température différentes : l'analyse révèle un spectre de valeurs propres à parties réelles négatives dans les deux cas. L'équilibre est donc stable, ce qui est tout à fait cohérent avec les résultats des intégrations temporelles. Pourtant, les spectres des deux études sont

différents. Nous noterons les fortes disparités entre les modes propres les plus instables de chacune des deux expériences (Fig. 4.2 et 4.3). Ces disparités sont visibles à travers les structures spatiales de la température et de la salinité (seules variables dynamiques du système d'équations) et des caractéristiques temporelles de ces modes. Dans le cas du rappel en température de surface, le mode propre le plus instable est un mode linéaire amorti, dominé par la température. Dans le cas du flux de chaleur, le mode propre le plus instable est une oscillation amortie de 34 yr dominée par la température. De la même façon, nous avons diagonalisé l'adjoint de la matrice linéaire tangente dans le cadre de chacune des deux expériences. Le premier résultat est que, comme le prédit la théorie, le spectre n'est pas modifié. Néanmoins, les structures spatiales des modes propres de la matrice Jacobienne sont très différentes de celles des modes propres de l'adjoint de la matrice Jacobienne, à l'image des modes linéaires les moins amortis (Fig. 4.2 et 4.3). Ce dernier résultat nous indique la présence d'un système linéaire non-normal ($\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} \neq 0$, où $\mathbf{A}$ définit la matrice linéaire tangente du système d'équations dynamiques 4.2 et $\mathbf{A}^\dagger$ son adjoint).

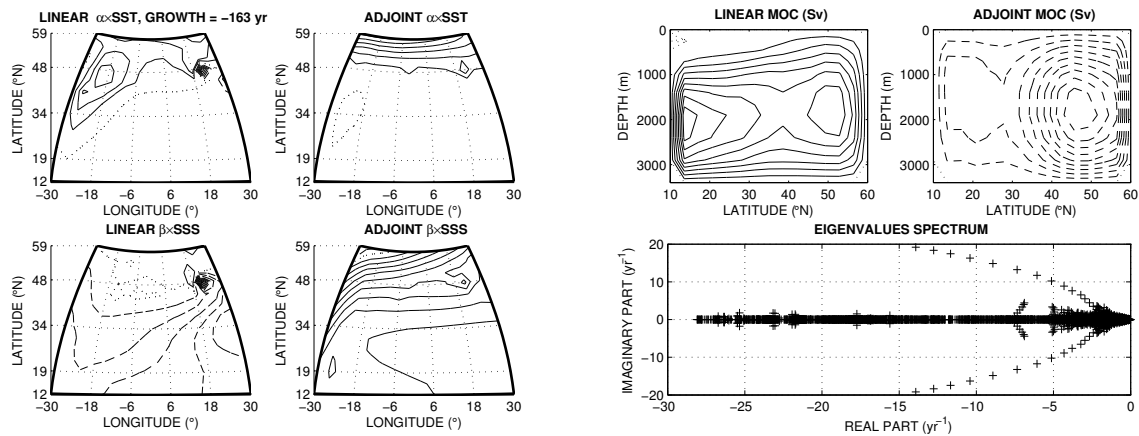


FIG. 4.2 – Analyse de stabilité linéaire en conditions mixtes. Le mode propre le moins amorti de la matrice linéaire tangente et de son adjoint : température, salinité de surface en terme de densité, circulation méridienne associée, et spectre complet des valeurs propres. Les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent aux anomalies positives, négatives et nulles : les intervalles de contours sont respectivement pour le vecteur propre du linéaire de 0.1, 0.1 et 5×10^3 Sv et de l'adjoint de 0.005, 0.1 et 5×10^4 Sv.

L'existence de non-normalités nous pousse à faire une étude de stabilité généralisée et ainsi à mesurer les croissances transitoires ou les croissances induites par un forçage stochastique. En outre, dans le contexte de deux états d'équilibre strictement identiques, mais obtenus pour des conditions aux limites distinctes, se pose la question de l'influence de ces conditions limites sur des études de croissances transitoires, dans le cas d'une perturbation initiale, ou de variabilités permanentes, dans le cas d'une perturbation stochastique.

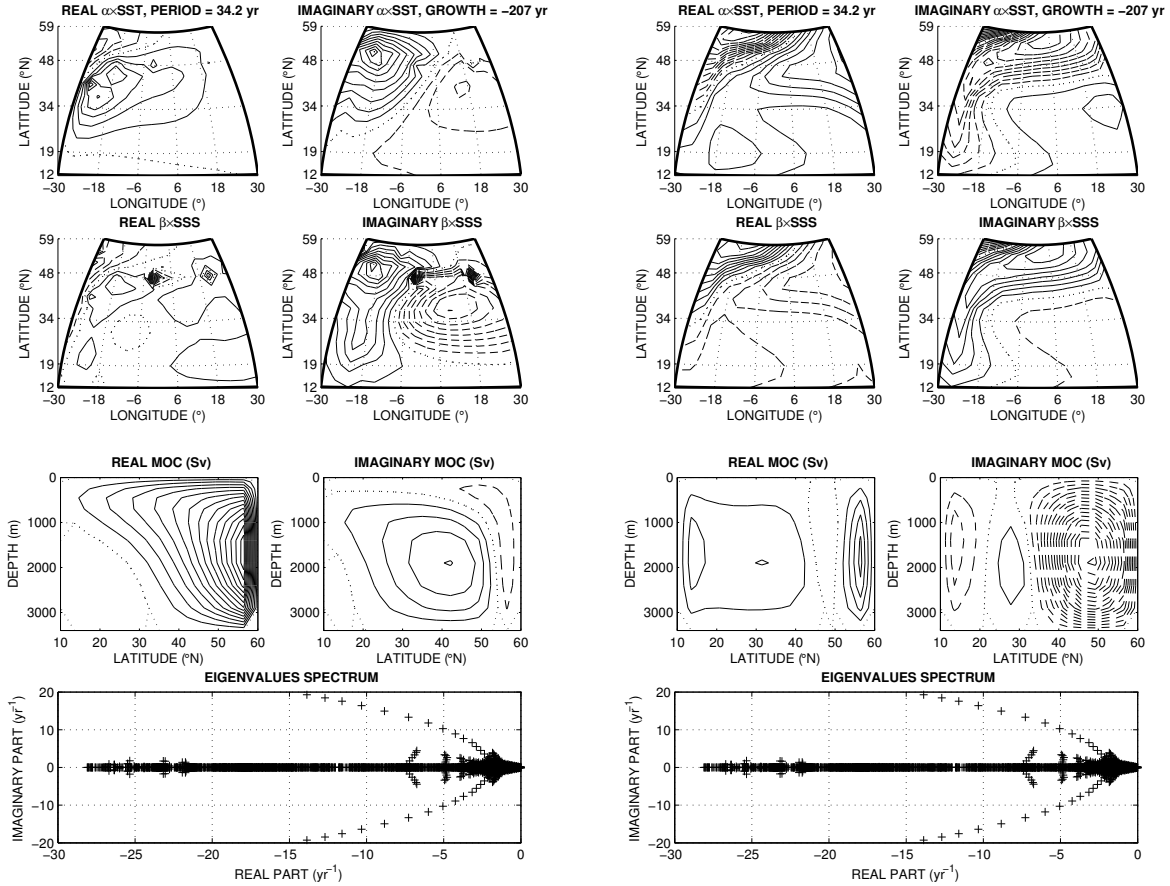


FIG. 4.3 – Représentation équivalente à la Fig. 4.2 pour l'expérience en flux de chaleur. Ici, les modes propres les moins amortis sont complexes. La partie réelle du vecteur propre de la matrice linéaire tangente (adjointe) est choisie telle qu'elle maximise la circulation méridienne (minimise la norme densité). La partie imaginaire est un quart de phase plus tard (8.5 yr). Les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent aux anomalies positives, négatives et nulles : les intervalles de contours sont respectivement pour le vecteur propre du linéaire de 0.1, 0.02 et 10³ Sv ou de l'adjoint de 0.005, 0.1 et 10⁵ Sv.

4.3 Perturbation initiale optimale de la salinité de surface

Dans un premier temps nous allons nous intéresser à la croissance de la circulation océanique soumise à une perturbation initiale de la salinité de surface (SSS). Pour cela, comme dans l'étude en deux dimensions, nous allons rechercher la structure de SSS modifiant de manière optimale le maximum de la circulation méridienne (MOC). Ce problème a une solution explicite qui peut s'écrire strictement sous la même forme que pour le problème 2D :

$$|u'\rangle = (2\gamma\mathbf{N})^{-1}\mathbf{P}^\dagger\mathbf{M}^\dagger(\tau)|F\rangle, \quad (4.3)$$

où $\gamma = \pm \langle F|\mathbf{P}\mathbf{M}(\tau)\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}^\dagger\mathbf{M}^\dagger(\tau)|F\rangle^{1/2}$ et $\mathbf{N} = \mathbf{P}^\dagger\mathbf{N}\mathbf{P}$. Nous rappelons que tous ces termes ont été définis lors de l'étude bidimensionnelle et sont ici simplement étendus à notre étude tridimensionnelle. Pour mémoire, $\langle F|$ est la projection du vecteur d'état $|u\rangle = |T, S\rangle$ donnant le maximum de la MOC, $\mathbf{S}$ est la norme de densité, $\mathbf{M}(\tau) = \exp(\mathbf{A}\tau)$ est le propagateur sur un temps τ du vecteur d'état et $\mathbf{P}$ est l'opérateur tel que $|u\rangle = \mathbf{P}|u'\rangle$ et où $|u'\rangle$ définit le vecteur d'état du sous-espace des SSS conservant le sel.

Pour nos deux expériences (conditions limites mixtes ou conditions limites en flux), la solution sera dépendante du temps τ après lequel apparaîtra la croissance (4.3). Ainsi nous tracerons la croissance du maximum de la MOC, $\langle F|\mathbf{P}|u'\rangle$, en fonction du délai de croissance τ (en haut à gauche de la Fig. 4.4 et de la 4.5). Une différence de comportement est notable entre les deux expériences : là où une forte décroissance suivie d'un léger sursaut, après 100 yr, apparaît pour les conditions mixtes, une décroissance avec une présence d'une forte variabilité multidécennale apparaît pour les conditions en flux. De même, l'ordre de grandeur de la réponse n'est pas du tout similaire. Les profils de croissance en fonction du délai montrent des maxima locaux. Nous choisissons d'étudier ces maxima, soit pour les conditions mixtes la croissance après 111 yr, et pour la condition en flux la croissance après 24 yr.

Dans l'expérience en conditions mixtes, la perturbation optimale correspond à un gradient méridien de la salinité de surface avec une faible incursion des eaux peu salées le long du bord ouest du bassin (Fig. 4.4). Cette structure de salinité induit une perturbation de la circulation négative qui correspond à une circulation de surface vers le sud. Cette structure évolue en 111 yr vers une circulation positive, c'est-à-dire qu'elle correspond à une circulation de surface vers le nord. Les instantanés de SSS, SST, ZOC et MOC, après 111 yr de l'intégration temporelle linéaire du modèle (Fig. 4.6), montrent que la structure en SSS a quasiment disparu et qu'une structure en SST de fort gradient méridien prend place. Cette nouvelle structure de densité correspond à une circulation méridienne positive, renforçant la structure de l'état d'équilibre. Nous constaterons la forte similitude de l'instantanée à 111 yr et du mode linéaire le moins amorti. Ceci correspond parfaitement avec le résultat attendu sur des échelles de temps longues, c'est-à-dire que seul persiste le mode le moins amorti à partir de 111 yr. C'est donc bien lorsque tous les autres modes linéaires ont disparu qu'apparaît une croissance de la circulation méridienne *via* le dernier

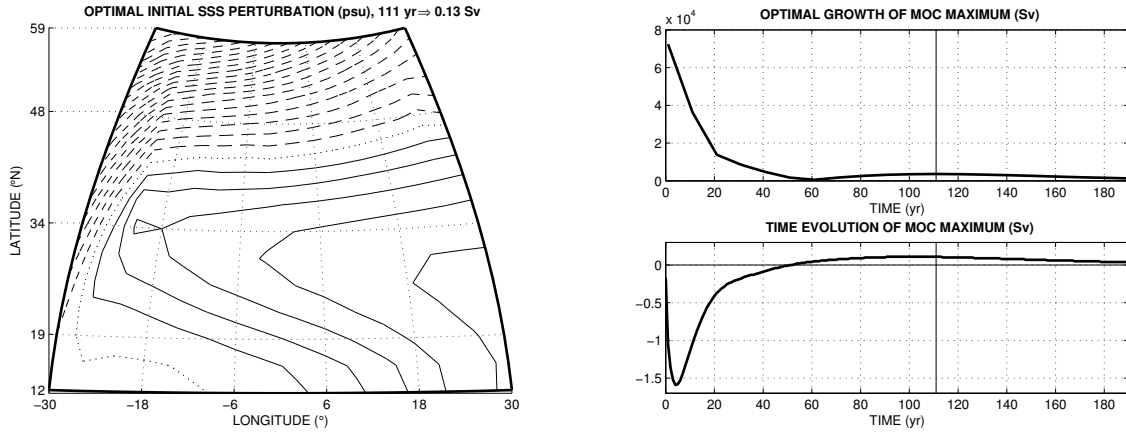


FIG. 4.4 – Perturbation initiale optimale de la SSS entraînant une croissance du maximum de la MOC après 111 yr pour l’expérience en conditions mixtes (le maximum de la structure est normalisé à 1 psu). En haut à droite, balayage de la croissance du maximum de la MOC en fonction du délai, un maximum local apparaît pour un délai de 111 yr (trait vertical), on utilisera ce temps comme optimal. En bas à droite, évolution temporelle du maximum de la MOC pour une expérience de perturbation initiale par l’optimal, une croissance apparaît à 111 yr (trait vertical). L’intégration temporelle se fait sur le modèle non-linéaire pour une perturbation de +0.01 psu, néanmoins, l’évolution temporelle a été étalonnée pour une perturbation équivalente à 1 psu. Les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent aux anomalies positives, négatives et nulles : les intervalles de contours sont de 0.05 psu.

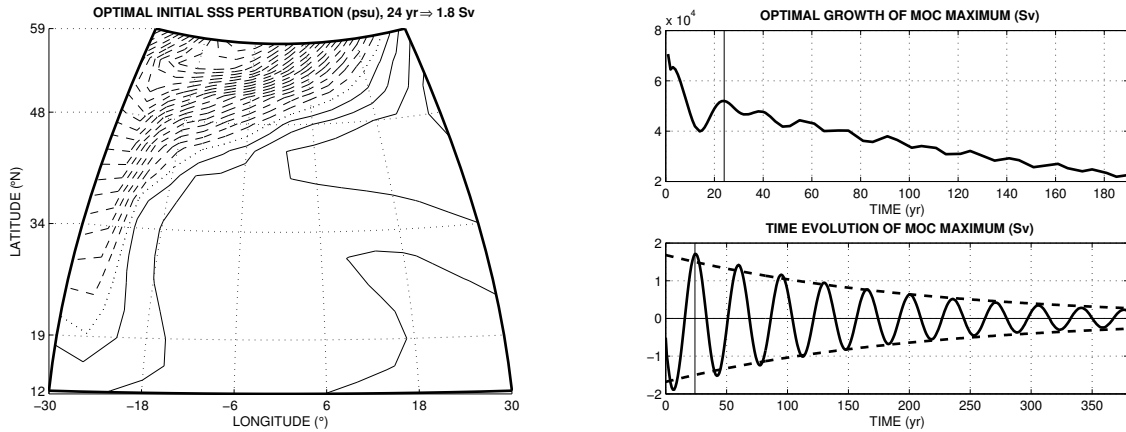


FIG. 4.5 – Figure équivalente à la Fig. 4.4 mais pour l’expérience en conditions de flux. Ici un maximum local plus important apparaît après un délai de 24 yr (trait vertical). On utilisera ce temps pour calculer les structures optimales. Dans l’évolution temporelle (en bas à droite), les pointillés représentent l’enveloppe de l’intensité de la MOC modulée par la décroissance du mode oscillant le moins amorti perturbé par notre optimal (4.4).

mode.

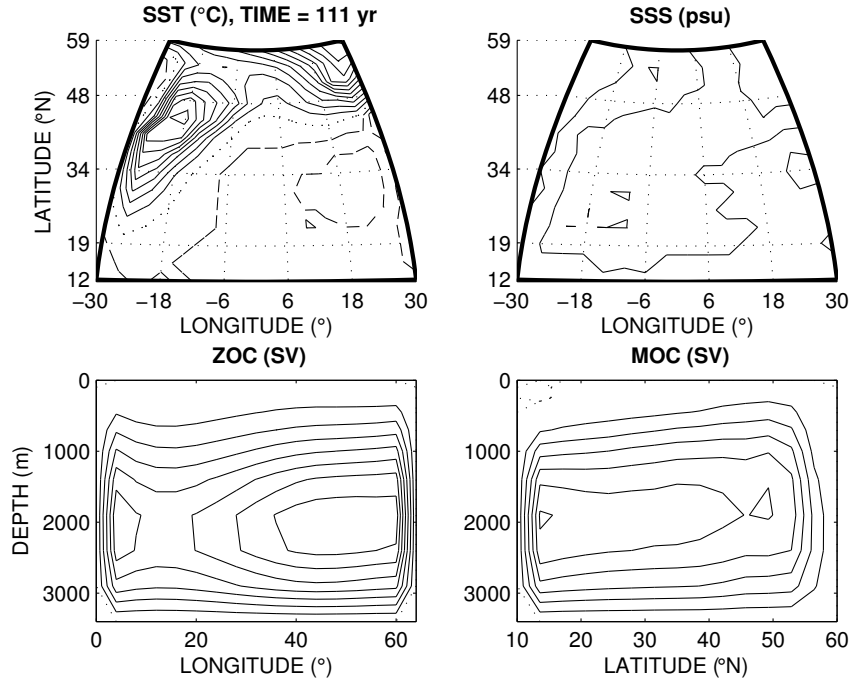


FIG. 4.6 – L’instantané de la perturbation optimale après une intégration de 111 yr pour l’expérience en conditions mixtes. On représente ici la température et la salinité de surface, la circulation zonale et méridienne. L’intégration temporelle a été faite sur le modèle non-linéaire pour une perturbation de $+0.01$ psu. Néanmoins, pour la représentation, la réponse a été étalonnée à une perturbation équivalente à 1 psu. Les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent aux anomalies positives, négatives et nulles : les contours vont respectivement de -1.5×10^{-3} à 5.5×10^{-3} par pas de $5 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}$; de 0 à 2×10^{-3} par pas de 5×10^{-4} psu; de 0.02 à 0.5 par pas de 0.02 Sv; de 0.02 à 0.2 par pas de 0.02 Sv.

Dans l’expérience avec flux, la structure optimale de SSS choisie sera celle induisant une croissance après 24 yr. Cette structure correspond à un minimum de salinité intensifié dans le nord du bassin avec une incursion dans l’ouest du bassin. Le zéro d’anomalie correspond à une séparation le long de l’axe sud-ouest, nord-est (Fig. 4.5). Les instantanés des anomalies après 24 yr de l’intégration temporelle, perturbée par la structure optimale, montrent que la circulation méridienne s’est intensifiée. En effet, la structure initiale induit une circulation méridienne faible et négative qui évolue dans le temps en une circulation méridienne positive atteignant son maximum après 24 yr. Les structures de SST, SSS, ZOC et MOC de cette anomalie (Fig. 4.7) sont très proches de la phase maximisant la circulation méridienne du vecteur propre oscillant le moins amorti. De la même façon que précédemment, ce résultat est en accord avec une décroissance des autres modes et

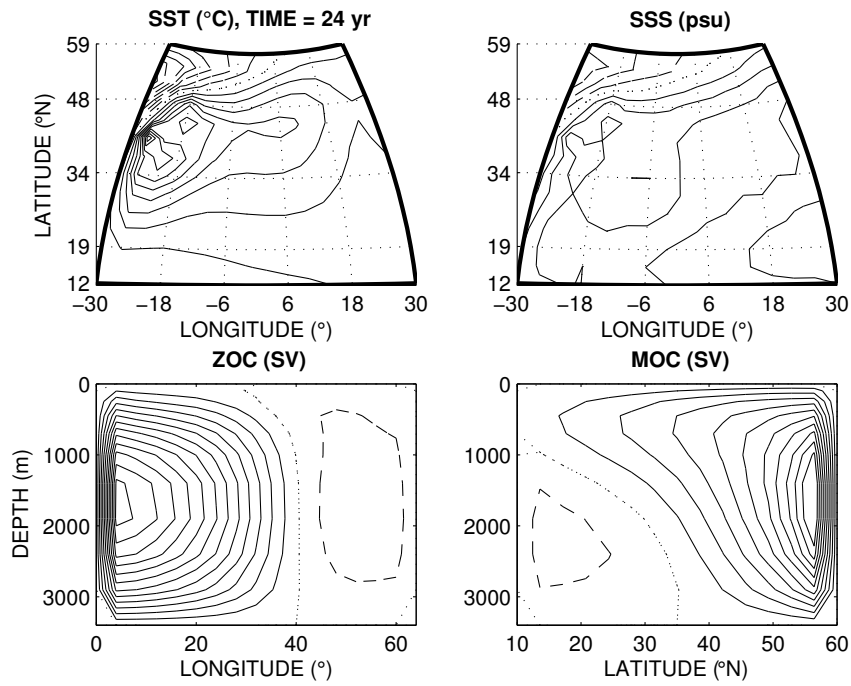


FIG. 4.7 – Comme pour Fig. 4.6 mais pour l’instantané de la perturbation optimale après une intégration de 24 yr pour l’expérience en conditions en flux. Les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent aux anomalies positives, négatives et nulles : les contours vont respectivement de -0.4 à 0.5 par pas de 0.05°C ; de -0.02 à 0.03 par pas de 5×10^{-3} psu ; de 0.2 à 5 par pas de 0.2 Sv ; de 0.2 à 2 par pas de 0.2 Sv.

l'apparition d'une croissance en temps fini *via* le mode le moins amorti.

Cependant étant donnée la structure complexe du mode le moins amorti, la croissance apparaît lors de la phase du mode où la circulation méridienne est maximale. Afin de mesurer la part de croissance en temps fini, nous avons estimé l'influence de la décroissance du mode linéaire le moins amorti, lorsque nous le stimulons par la SSS optimale, sur l'intensité de la circulation méridienne. Dans la section précédente nous avons écrit la matrice Jacobienne sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \sum_k |u_k\rangle \lambda_k \langle u_k^\dagger|,$$

où les $|u_k\rangle$ et $|u_k^\dagger\rangle$ sont les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\dagger$ et λ_k les valeurs propres de $\mathbf{A}$. Le propagateur s'écrit alors :

$$\mathbf{M}(t) = \sum_k |u_k\rangle e^{\lambda_k t} \langle u_k^\dagger|.$$

Afin d'isoler l'influence du mode oscillant le moins amorti, nous faisons l'approximation que le propagateur se réduit à ce seul mode :

$$\mathbf{M}(t) = |u_1\rangle e^{\lambda_1 t} \langle u_1^\dagger| + c.c. .$$

En notant $|u_0\rangle$ comme la SSS optimale, l'intensité de la circulation méridienne s'écrit :

$$\langle F|\mathbf{M}(t)|u_0\rangle = \langle F| \left(|u_1\rangle e^{\lambda_1 t} \langle u_1^\dagger| + c.c. \right) |u_0\rangle .$$

En décomposant la valeur propre comme une somme de sa partie réelle et imaginaire ($\lambda_1 = \lambda_r + i\lambda_i$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle F|\mathbf{M}(t)|u_0\rangle &= \left[\langle F| \left(|u_1\rangle e^{i\lambda_i t} \langle u_1^\dagger| + c.c. \right) |u_0\rangle \right] e^{\lambda_r t}, \\ &= 2 \langle F|u_1\rangle \langle u_1^\dagger|u_0\rangle \cos(\lambda_i t) e^{\lambda_r t}, \\ &\leq 2 \langle F|u_1\rangle \langle u_1^\dagger|u_0\rangle e^{\lambda_r t}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Cette dernière expression mesure l'influence de la décroissance exponentielle de la perturbation initiale, projetée sur notre mode oscillant, sur le maximum de la circulation méridienne. Ce dernier résultat (passage d'un maximum de circulation de 0.17 Sv à l'instant initial à 1.5 Sv après 24 yr), comparé à la solution complète (passage d'un maximum de circulation de 0.17 Sv à l'instant initial à 1.7 Sv après 24 yr), montre qu'il y a bien croissance en temps fini de la perturbation à 24 yr (Fig.4.5). La différence de croissance est de 13% en faveur du modèle complet. Néanmoins, la croissance entre le temps initial et après 24 yr est due essentiellement au changement de phase de l'oscillation amortie entre ces deux instants. En effet, chaque phase n'influence pas avec la même intensité l'intensité de la circulation. Rappelons tout de même ici que nous ne comparons pas le résultat attendu dans un système normal à celui dans un système non-normal, puisque le dernier calcul prend bien en compte les termes de non-normalité (prise en compte des $|u_1^\dagger\rangle$). Ainsi, à

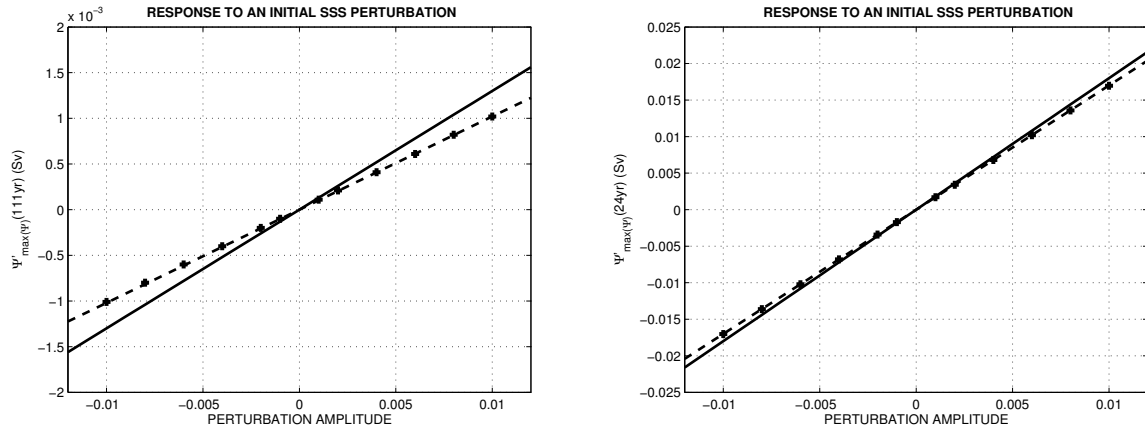


FIG. 4.8 – Comparaison des valeurs théoriques (trait gras) de l’augmentation du maximum de circulation avec celles de l’intégration non-linéaire du modèle (+) et avec celles de la loi linéaire la plus proche des croissances de l’intégration non-linéaire du modèle (tirets). L’erreur relative est de l’ordre de 30% (5%) pour la condition de forçage mixte (en flux).

cause de ce résultat, conclure à une faible influence des non-normalités ne serait pas valide.

Dans le dernier temps de l’étude des perturbations initiales optimales, nous cherchons à valider l’approximation linéaire. Cette approximation est la plus lourde de conséquence dans ce type de travail. Dans notre cas, nos équations ne sont pas linéarisables à cause du terme de convection dans (4.2). L’obtention de la matrice Jacobienne passe par une linéarisation du terme de convection (nous avons pris la moyenne de l’effet d’une perturbation positive et négative). De ce fait, bien que l’approximation linéaire soit censée exister au voisinage de l’état d’équilibre, cette vérification est loin d’être évidente dans notre étude. Pour la validation de cette approximation, nous intégrons temporellement le modèle non-linéaire initialisé par la perturbation modulée par différentes intensités. Les croissances ainsi observées sont comparées avec les valeurs théoriques linéaires obtenues à l’aide de notre matrice Jacobienne. Il s’avère que les résultats ont une erreur inférieure à 30% pour les expériences en conditions mixtes, alors que l’erreur reste inférieure à 5% pour les expériences en conditions de flux. Les domaines de validité linéaire sont vérifiés pour des perturbations de l’ordre de 10^{-2} psu ou inférieures. L’erreur finale correspondant au cumul des erreurs le long des intégrations temporelles, une forte disparité apparaît entre les erreurs des intégrations de 111 yr (conditions mixtes) et de 24 yr (conditions en flux). Rappelons qu’ici nous validons la réponse à nos perturbations optimales, calculée dans un cadre linéaire, et non pas nos structures de perturbations optimales. En effet, dans cette validation, rien ne nous permet de nous assurer qu’une étude des perturbations optimales dans un cadre non-linéaire n’ait pas pour résultat une perturbation optimale différente, qui soit elle-même plus efficace que celle de l’étude linéaire.

Ces deux études de perturbations optimales montrent une réelle différence quant aux

mécanismes de croissances en temps fini, et ceci bien que l'état d'équilibre utilisé dans les deux cas soit strictement le même. Afin de développer cette idée, nous nous proposons de nous focaliser sur des perturbations stochastiques. Nous pourrions ainsi quantifier les différences induites par le choix du forçage thermique sur la réponse d'un équilibre stable à des perturbations, non plus dans le cadre d'un régime transitoire, mais permanent.

4.4 Perturbation stochastique optimale du flux d'eau douce

Le but de cette partie est d'évaluer la variabilité induite par une perturbation stochastique (perturbation modulée par un bruit blanc) du flux d'eau douce de surface sur la circulation océanique. Comme dans la section précédente, nous prêterons une attention toute particulière à la différence de réponse entre une circulation forcée par des conditions mixtes et cette même circulation forcée par des conditions en flux.

La solution optimale évaluée dans l'étude bidimensionnelle peut être appliquée ici. Nous obtenons un problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{H}(\infty)|g'\rangle = \gamma|g'\rangle. \quad (4.5a)$$

avec

$$\mathbf{H}(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau ds \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau - s) |F\rangle \langle F| \mathbf{M}(\tau - s) \mathbf{P}, \quad (4.5b)$$

en utilisant les mêmes notations que dans la section précédente. Le vecteur $|g'\rangle$ est ici le vecteur d'état du sous-espace des flux de salinité de surface (SSF) conservant le sel. Pour les deux expériences, la solution optimale est celle ayant la plus grande valeur propre, c'est-à-dire la structure de SSF induisant la plus grande variance du maximum de la MOC en régime permanent (sur les temps infinis).

Pour l'expérience aux conditions mixtes, la perturbation optimale correspond à un dipôle avec une partie négative fortement intensifiée dans le nord ouest du bassin et une partie positive dans les hautes latitudes, mais à l'est du bassin (gauche Fig. 4.9). Cette perturbation est principalement localisée dans la région nord de notre bassin, dans une zone de 20° autour de la latitude du maximum de la MOC. La réponse de la circulation reste extrêmement faible, puisqu'une perturbation de 1 m yr^{-1} d'écart type induirait une variabilité d'un écart type de seulement 1.25 Sv.

Le spectre de la réponse au forçage stochastique optimal correspond à un bruit rouge avec une très légère signature d'un pic autour de 300 yr (gauche Fig. 4.10). Cette signature correspond au mode oscillant le moins amorti de période 329 yr. Ce mode étant très amorti (58 yr) par rapport à sa période, il n'apparaît qu'une faible réponse aux stimulations du bruit blanc, et donc une faible signature sur le spectre.

Pour l'expérience en conditions de flux, la perturbation stochastique optimale est un dipôle de grande échelle (droite Fig. 4.9). Cette perturbation ressemble très fortement à

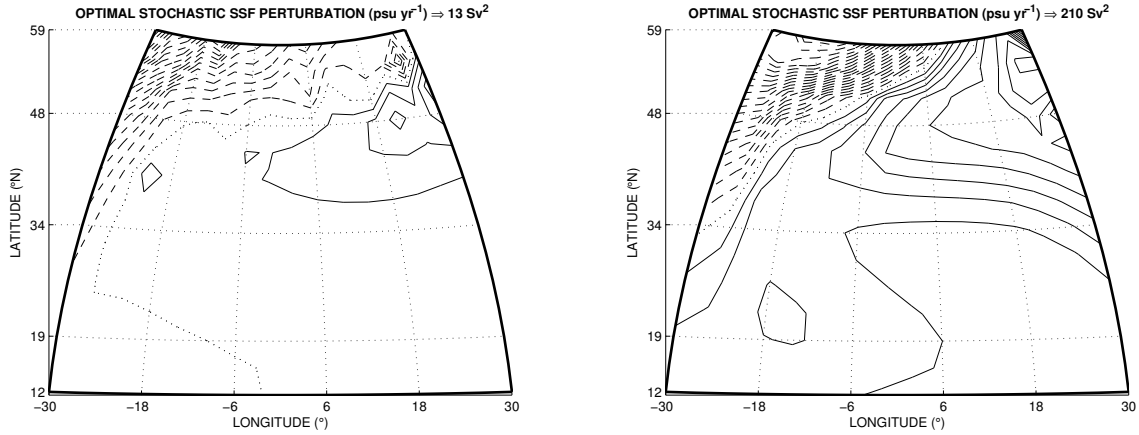


FIG. 4.9 – Perturbation optimale stochastique pour l’expérience aux conditions mixtes et en flux. Le maximum absolu de la structure de SSF est ici normalisé à un 1 psu yr^{-1} . Il induirait une variabilité du maximum de circulation d’écart type 3.6 et 14.5 Sv. Les traits pleins, les tirets et les pointillés correspondent aux anomalies positives, négatives et nulles : les intervalles de contours sont de 0.05 psu yr^{-1} .

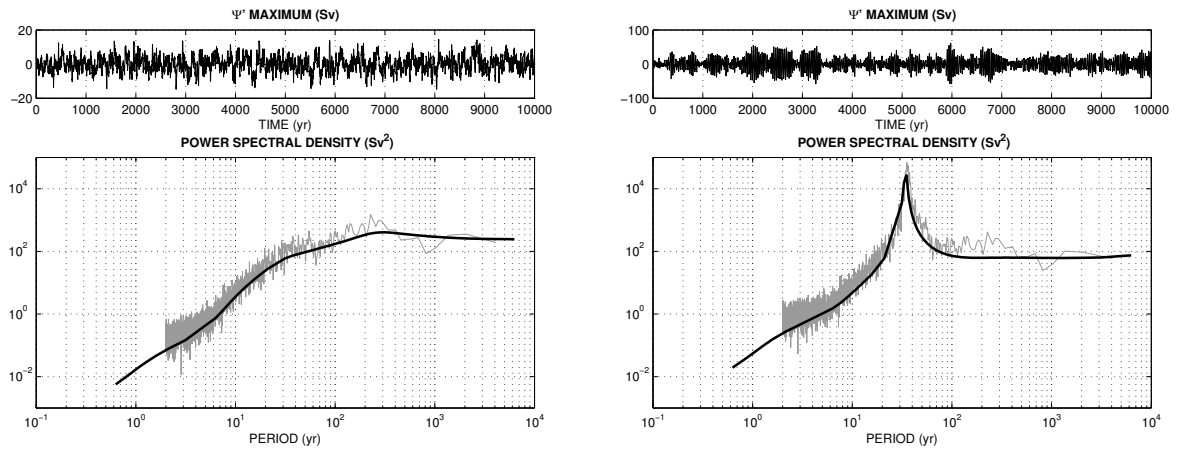


FIG. 4.10 – Spectres de la réponse aux optimaux stochastiques pour l’expérience aux conditions mixtes et en flux. En haut, réponses du maximum de la MOC lors d’une intégration temporelle avec une perturbation optimale stochastique. Les intégrations non-linéaires sont faites pour une perturbation de $+0.01 \text{ psu yr}^{-1}$ mais étalonnée lors de la représentation à une intensité de 1 psu yr^{-1} . En bas, comparaison du spectre théorique (trait gras) avec le spectre d’une intégration temporelle du modèle non-linéaire (trait grisé). La forme est bonne pour toutes les fréquences, mais une faible sous-estimation de leurs puissances spectrales apparaît.

l'optimal des perturbations initiales pour cette même expérience (Fig. 4.5). La perturbation est intensifiée au nord ouest du bassin avec une légère incursion le long du bord ouest. Le reste du bassin est de signe opposé, avec une légère intensification au nord est, afin d'assurer la conservation du sel. L'écart type induit par la perturbation stochastique optimale de cette expérience est nettement supérieur à celui de l'expérience précédente, mais reste faible puisqu'il serait de 5 Sv pour une anomalie de 1 m yr^{-1} .

Le spectre de la réponse du maximum de la MOC a lui aussi évolué significativement dans cette expérience (droite Fig. 4.10). En plus de la forme en bruit rouge, déjà notable pour l'expérience précédente, apparaît un pic à une période de l'ordre de 35 yr. Cette variabilité peut être expliquée par le mode propre oscillant le moins amorti, qui possède une période de 34 yr et un temps de décroissance d'un ordre plus faible (207 yr). Ce mode peut donc avoir plusieurs cycles d'oscillation d'amplitude notable avant de s'éteindre et donc avoir une plus forte signature spectrale. La puissance spectrale, comme les intégrations temporelles, montrent que l'augmentation de la variance, dans la réponse du maximum de la MOC entre les deux expériences (forçage en conditions mixte ou en flux), apparaît par le mode oscillant à 34 yr. Ce dernier n'était pas du tout actif dans l'expérience précédente alors qu'il est maintenant prépondérant.

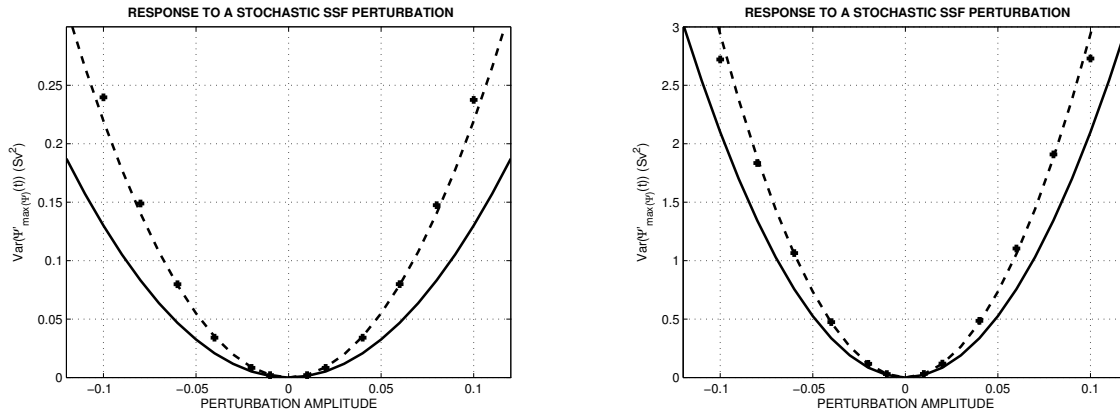


FIG. 4.11 – Comparaison des valeurs théoriques de la variance avec celles des variances de l'intégration non-linéaire du modèle (+) et avec celles de la loi quadratique la plus proche des variances de l'intégration non-linéaire du modèle (tirets) pour les optimaux stochastiques. L'erreur relative sur l'écart type est de l'ordre de 23% (15%) pour la condition de forçage mixte (en flux).

Comme pour l'étude aux perturbations initiales, notre étude linéaire est validée par une comparaison entre notre résultat théorique, appliqué à la matrice Jacobienne, et des intégrations temporelles pour différentes intensités de l'écart type de nos perturbations stochastiques par le modèle non-linéaire. Ici, comme précédemment, ce n'est pas une validation de la théorie optimale, mais bien une validation de la réponse des optimaux trouvés. L'erreur sur l'écart type pour la perturbation stochastique optimale dans l'expérience aux conditions mixtes est de l'ordre de 23%, alors que pour l'expérience aux conditions en

flux elle est de l'ordre de 15%. Le fait que le premier optimal est plus fortement localisé dans la zone nord du bassin, c'est-à-dire une zone faiblement stratifiée là où la convection prête le plus à conséquence, peut expliquer cette différence.

4.5 Conclusion

À l'image de la section précédente, nous nous sommes intéressés à la sensibilité de la circulation océanique à des flux d'eau douce et à la salinité de surface des océans dans la région nord atlantique. Nous avons cherché à quantifier les modifications de la circulation, soumise à une perturbation initiale de la salinité de surface ou à une perturbation stochastique du flux d'eau douce.

Afin d'apporter une vue plus réaliste aux résultats déjà obtenus, nous nous sommes placés dans l'approximation d'un modèle 3D planétaire-géostrophique, sur lequel nous avons linéarisé les équations autour d'un état d'équilibre. Cet état d'équilibre est choisi pour être valide aussi bien pour un forçage aux conditions mixtes (rappel en température et flux d'eau douce) que pour un forçage aux conditions en flux. Nous avons pu étudier les variations dans les réponses aux perturbations optimales entre ces deux configurations de forçages.

Le premier résultat de ce type d'étude, qui ici nous permet d'affiner les résultats de la section précédente, est l'obtention de bornes sur le changement de la circulation. En effet, puisque nous connaissons la variabilité induite par la structure optimale, nous savons qu'aucune autre structure ne pourra modifier plus fortement notre circulation. Ainsi, pour des perturbations typiques observées dans l'Atlantique nord (Levitus, 1989) entre 0.2 et 0.3 psu, nous savons que la variabilité ne pourra pas dépasser 0.05 Sv pour la condition mixte et 0.5 Sv pour la condition en flux. De même, la réponse à un bruit stochastique d'intensité typique de l'ordre de 10 à 20 cm yr⁻¹ (estimation de l'écart type inter-annuel aux moyennes latitudes à partir des ré-analyses NCEP et ERA40) aura au maximum une réponse de l'intensité de la circulation d'un écart type de 0.25 Sv pour la condition mixte, et de 1 Sv pour la condition en flux. Ces résultats permettent donc d'affiner les résultats de la section précédente.

Le deuxième résultat est la mise en évidence de différences très importantes dans la réponse à une perturbation (initiale ou stochastique) lorsque les mécanismes de forçage de la température sont différents. En effet, notre étude révèle que, bien que l'état d'équilibre soit strictement le même, le choix d'un rappel en température ou d'un flux de chaleur à la surface entraîne de fortes différences dans les modes et intensités de réponses de la circulation. Ceci implique que, dans ce type d'étude, avoir un état d'équilibre représentant parfaitement la circulation océanique ne suffit pas, il faut également bien représenter les mécanismes physiques qui y sont associés.

Un autre résultat de notre étude est l'apparition, dans le cas des conditions limites en flux, de la variabilité multi-décennale de l'Atlantique (AMV) dans la réponse à une perturbation initiale et stochastique. Pour cette dernière, c'est bien l'AMV qui domine

largement le spectre de réponse de l'intensité de la circulation thermohaline.

Après l'étude dans un modèle planétaire-géostrophique 2D puis 3D, nous nous proposons maintenant de continuer notre étude sur un modèle de circulation océanique réaliste, régi par les équations primitives. Il paraît intéressant de poursuivre cette étude de variabilité basses fréquences dans un modèle incluant des équations qui autorisent des échelles de temps plus rapides. De même, notre étude porte ici sur un bassin rectangulaire à fond plat, ce qui est une très grossière approximation de l'Atlantique nord. L'extension à une circulation globale dans des bassins plus réalistes pourrait fortement modifier nos résultats.

Chapitre 5

Impact de la salinité de surface sur la circulation océanique en configuration réaliste globale

5.1 Introduction

À l'image des deux sections précédentes nous nous proposons d'étudier les perturbations optimales de la salinité de surface influençant le plus la circulation océanique. Dans le but de rendre la dynamique plus riche et plus réaliste que précédemment, nous allons poursuivre notre étude *via* un modèle aux équations primitives dans une configuration globale réaliste. Ce passage à un nouveau modèle plus complet suit la ligne directrice de ce chapitre qui a pour but d'affiner le réalisme de nos résultats pas à pas.

Des études sur des modèles 3D aux équations primitives, comme celles de Sirkes et Tziperman (2001) ainsi que Bugnion et al. (2006b,a), ont déjà étudié la sensibilité de la circulation océanique au forçage (flux de chaleur ou d'eau douce en surface ou encore tension de vent), ou au champ de traceur (température et salinité) au travers de différentes mesures de la circulation comme le transport de chaleur dans l'Atlantique aux moyennes latitudes, ou l'intensité de la circulation méridienne.

Dans l'étude qui suit, nous nous proposons d'étudier la sensibilité de la circulation océanique d'un modèle aux équations primitives en configuration globale réaliste. Nous chercherons plus particulièrement à quantifier les croissances en temps fini de la circulation océanique induites par des perturbations de la salinité de surface. Afin d'évaluer les modifications de la circulation océanique nous proposons deux mesures, déjà exposées dans les études citées précédemment, l'intensité de la cellule de circulation méridienne et l'intensité du transport de chaleur. Ces deux mesures sont choisies pour leur valeur synthétique de la dynamique océanique grande échelle et donc indirectement de la dynamique du climat.

Dans un premier temps (section 5.2) nous décrirons rapidement le modèle aux équations primitives non-linéaires et sa linéarisation. Nous pourrions ainsi obtenir *via* ce modèle un état d'équilibre qui sera succinctement décrit puis utilisé pour la suite de notre travail. Dans une deuxième partie (section 5.3) nous expliciterons les deux optimaux de salinité de surface conservant le sel influençant le plus, soit l'intensité de la cellule de circulation méridienne, soit l'intensité du transport de chaleur. Les mécanismes de croissance transitoire induits par ces optimaux seront décrits et rationalisés dans la suite de notre travail. Nous nous servirons de cette étude pour fixer une borne maximum à la variabilité induite par de telles croissances transitoires. Enfin, dans la dernière partie (section 5.4), nous récapitulerons les résultats et nous proposerons quelques perspectives.

5.2 Modèles et état d'équilibre

Le modèle utilisé dans cette étude est le modèle aux équations primitives OPA (Madec et al., 1997) dans sa configuration globale ORCA2. Il correspond à une résolution horizontale de 2° sur 31 niveaux verticaux (Madec et Imbard, 1996). Le modèle est intégré sur une grille-C d'Arakawa en coordonnées z . Nous utilisons le modèle sous l'approximation du toit rigide. En effet, l'utilisation de la surface libre induit des instabilités numériques dans le modèle du propagateur linéaire tangent adjoint, nécessaire à notre étude, lors de l'intégration sur des échelles de temps de l'ordre d'au moins 3 mois. Cette approximation a pour conséquence de filtrer les ondes de gravité de surface. Néanmoins, étant donné les échelles de temps de l'ordre de plusieurs années que nous souhaitons étudier, cette approximation n'a pas d'impact sur nos résultats. En outre, le modèle contient une paramétrisation de la convection par augmentation de la diffusion verticale quand la stratification devient instable; de la double diffusion en prenant en compte deux termes différents de mélange pour la température et la salinité, des vitesses induites par les tourbillons (Gent et McWilliams, 1990); du mélange vertical par un schéma de fermeture turbulente (Blanke et Delecluse, 1993); des coefficients de mélange de la dynamique (vitesses horizontales) variant selon la longitude, la latitude et la verticale; de la diffusion isopycnale des traceurs et des coefficients de mélange des traceurs (température et salinité) variant selon la longitude et la latitude.

Le modèle du propagateur linéaire tangent et son adjoint, utilisé dans le reste de l'étude, est OPATAM (Weaver et al., 2003). Ce modèle est la linéarisation, autour d'un état moyen, du modèle complet décrit auparavant. Cependant quelques linéarisations ne seront pas complètes. Les perturbations subiront les coefficients de mélange vertical calculés par le schéma de fermeture turbulente appliqué à l'état moyen, mais on négligera les variations de ces coefficients associés aux perturbations. De la même façon, le mélange des perturbations des traceurs se fera le long des surfaces isopycnales de l'état moyen, et on négligera les variations par les perturbations des surfaces isopycnales. Enfin, les perturbations de l'advection induite par les tourbillons et les coefficients de double diffusion seront négligées.

L'état d'équilibre est obtenu en intégrant le modèle OPA par des conditions limites constantes dans le temps. Ces conditions sont obtenues en moyennant tous les forçages sur un cycle saisonnier. Les forçages de surface sont les flux ECMWF moyennés entre 1979 et 1993, les tensions de vents ERS (réanalysées *via* les données TAO) moyennées de 1993 à 1996, la température de surface de Reynolds moyennée de 1982 à 1989, la salinité de surface de la climatologie de Levitus et une moyenne saisonnière d'une estimation climatologique des *runoffs*. En plus, un rappel dans la masse, sur les valeurs de température et salinité de la climatologie de Levitus, est prescrit en mer Rouge et mer Méditerranée. L'intégration du modèle complet soumis à ces forçages, avec comme condition initiale les champs climatologiques de Levitus, montre que l'énergie cinétique converge vers un état d'équilibre après environ 200 yr d'intégration (à droite de la Fig. 5.2). Cet état d'équilibre est caractérisé par une cellule de circulation méridienne Atlantique ayant un transport de masse en surface vers le nord avec un retour vers le sud autour de 1 500 m. Une cellule de recirculation est présente entre 2 000 et 4 500 m (Fig. 5.1). L'intensité de cette circulation méridienne est d'environ 7 Sv, là où nous nous attendons à une circulation de l'ordre de 18 Sv dans la réalité (Talley et al., 2003). Une telle différence est principalement due à l'élimination du cycle saisonnier par une moyenne de celui-ci. Cette moyenne a pour effet de limiter les *extrema* de température de surface, réduisant d'autant la formation d'eau profonde. Le transport de chaleur méridien dans l'Atlantique, correspondant à cette circulation, est positif vers le nord. Ce transport a un maximum d'environ 0.6 PW à 27°N, alors que Ganachaud et Wunsch (2000) l'estiment à 1.3 PW à 24°N dans l'océan. Nous considérerons cette circulation barocline comme qualitativement satisfaisante étant donné que le forçage est ici constant (moyenne saisonnière).

L'état d'équilibre révèle de la variabilité (à la limite de la résolution), principalement localisée dans le Pacifique est équatorial, d'une période de ~ 4 yr. Cette variabilité n'a aucun impact sur l'intensité de la circulation méridienne Atlantique (l'amplitude de variabilité induite est inférieure à 10^{-4} Sv). Ainsi, pour notre calcul des optimaux nous proposons de prendre comme état d'équilibre la moyenne sur les 10 dernières années de l'intégration du modèle complet. Dans le même temps, nous amortissons la zone équatoriale afin d'éviter la croissance de la variabilité lors de l'intégration du modèle linéaire. En effet, les termes non-linéaires étant absents lors des étapes suivantes de notre étude, la saturation du mode équatorial n'est plus possible. Les résultats sont ainsi pollués dans l'ensemble du bassin par le mode équatorial comme le confirment les intégrations temporelles du modèle linéaire. Afin d'éviter une telle pollution, nous imposons dans le modèle linéaire et dans son adjoint un terme de rappel avec une constante de temps de 1 jour des perturbations de température et de salinité à leur valeur d'équilibre dans la zone 10°S–10°N du Pacifique sur toute la profondeur.

De plus, à l'image de l'étude précédente (chapitre 4), nous relâchons le rappel en température et en salinité de surface, sur la température de surface de Reynolds et la salinité de surface de la climatologie de Levitus, afin de permettre une plus grande va-

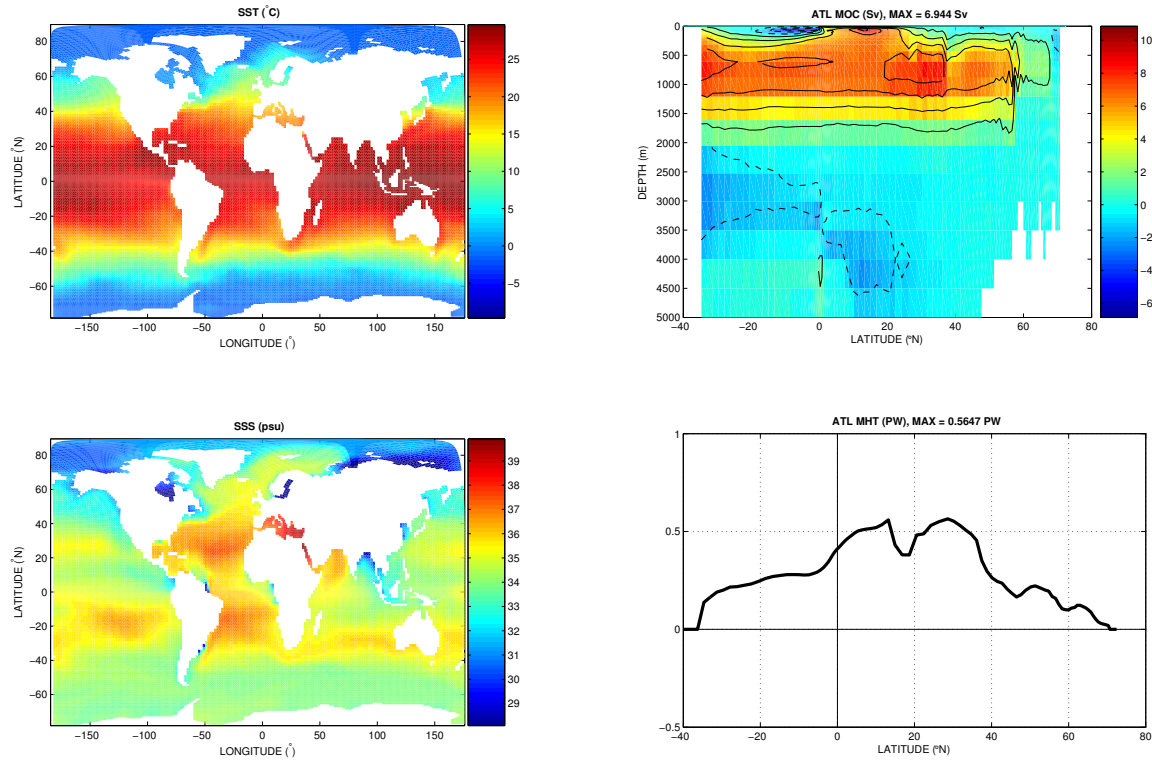


FIG. 5.1 – État d'équilibre du modèle aux équations primitives (OPA) en configuration globale (ORCA2), pour une intégration temporelle sans cycle saisonnier. En haut à gauche la température de surface (SST) à l'équilibre et en bas à gauche la salinité de surface (SSS) à l'équilibre. En haut à droite la circulation méridienne (MOC) à l'équilibre avec un maximum local de la fonction courant la représentant à 48°N de latitude et 600 m de profondeur. En bas à droite le transport de chaleur (MHT) à l'équilibre avec un maximum à 27°N de latitude. Pour la représentation de la MOC les traits pleins et les pointillés représentent respectivement les valeurs positives (de 1 à 11 Sv) et négatives (de -1 à -9 Sv) écartées de 2 Sv.

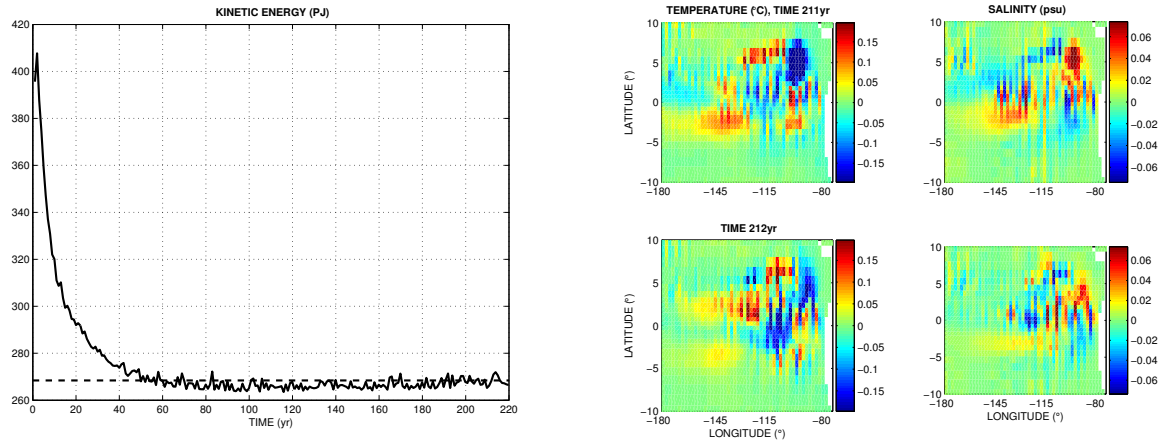


FIG. 5.2 – À gauche, évolution de l'énergie cinétique (trait plein) durant une intégration de notre modèle sans cycle saisonnier en partant d'un état initial correspondant à une moyenne annuelle des champs de température et de salinité de Levitus. L'état, dit d'équilibre, est défini comme la moyenne sur les dix dernières années de l'intégration. Cet état correspond à un niveau d'énergie cinétique de 268 PJ (pointillés). Une variabilité (à la limite de la résolution du modèle) sur l'énergie cinétique apparaît autour de notre état moyen. À droite, les anomalies de l'intégration temporelle par rapport à l'état moyen révèlent que cette variabilité est localisée dans le Pacifique est équatoriale. La période de l'oscillation est de ~ 4 yr sur la température comme sur la salinité (elle est de ~ 2 yr sur l'énergie cinétique - terme quadratique). La colonne de gauche (droite) représente la température (salinité) à 211 yr et 1 yr plus tard, soit un quart de phase.

riabilité et l'augmentation des croissances transitoires. Rappelons que, bien que par cette modification nous changeons le forçage, l'état d'équilibre reste valide et l'approximation linéaire autour de celui-ci aussi.

La dernière modification entre les intégrations non-linéaires et linéaires est la fermeture de la mer Méditerranée. En effet, une instabilité au niveau du détroit de Gibraltar apparaît dans le modèle linéaire. Cette instabilité est sûrement due à la mauvaise résolution du détroit (un seul point de grille sur la latitude). Ce qui, de fait, n'autorise que les mouvements baroclines. L'existence d'un seul point de vitesse zonale non-nulle induit, à cause de la condition sans glissement à la côte, deux vortex de signes opposés sur chacune des côtes. Ces deux vortex ont une rétroaction positive sur l'intensité de la vitesse zonale à travers le détroit. Cette rétroaction est une explication possible de l'instabilité de l'écoulement à travers le détroit. Or, la fermeture de la mer Méditerranée lors des intégrations du modèle linéaire (comme de l'adjoint) annihile cette instabilité. Néanmoins, nous avons choisi pour cette étude de conserver la mer Méditerranée dans les intégrations non-linéaires afin de mieux représenter les masses d'eaux dans l'Atlantique nord. Ainsi, lors des intégrations du modèle linéaire (et de l'adjoint), l'état moyen représente un état où la mer Méditerranée est active, et seules les perturbations (de température, salinité et vitesses horizontales) sont interdites dans la mer Méditerranée.

5.3 Perturbation initiale optimale de la salinité de surface

Nous allons étudier les perturbations initiales de la salinité de surface induisant le maximum de changements de la circulation océanique. Comme exprimé précédemment, il est nécessaire de choisir une mesure de la participation océanique au climat. Deux mesures essentielles de la dynamique de l'océan sont utilisées : l'intensité de la circulation méridienne et du transport de chaleur. Pour cela, nous évaluerons l'intensité comme les modifications localisées au maximum de la mesure de l'état moyen. De cette façon, le choix de ces mesures est cohérent avec l'approximation linéaire. De plus, ces mesures sont linéaires, c'est-à-dire qu'elles peuvent s'exprimer comme la projection, ou produit scalaire, du vecteur d'état sur le vecteur mesure. Nous obtenons donc $\langle F | \bar{U} \rangle$ (où $|F\rangle$ est le vecteur mesure et $|\bar{U}\rangle$ le vecteur d'état moyen) qui correspondra au maximum de la circulation méridienne ou au maximum de transport de chaleur, soit à la circulation méridienne à 48°N et 600 m de profondeur ou au transport de chaleur à 27°N. Ici nous allons essayer de trouver la perturbation initiale maximisant la mesure. Et nous allons, en plus, comme dans les chapitres précédents, imposer des contraintes à notre maximisation. Les contraintes sont que :

1. la perturbation initiale est seulement fonction de la salinité de surface :

$$|u(0)\rangle = \mathbf{P} |u'\rangle ,$$

où $|u(0)\rangle$ est la perturbation initiale, $|u'\rangle$ le sous-espace des salinités de surface et $\mathbf{P}$ l'opérateur passant d'un espace à l'autre ;

2. la perturbation initiale conserve le sel :

$$\langle C|u(0)\rangle = 0,$$

où $\langle C|$ mesure le contenu de sel d'un vecteur d'état ;

3. la perturbation est normée :

$$\langle u(0)|\mathbf{S}|u(0)\rangle = 1,$$

où $\mathbf{S}$ est un opérateur mesurant l'écart du vecteur d'état à l'état d'équilibre en terme de densité. Cette dernière contrainte est nécessaire pour lever la dégénérescence des problèmes de maximisation dans un cadre linéaire.

Enfin, nous pouvons réécrire la propagation d'une perturbation comme :

$$|u(\tau)\rangle = \mathbf{M}(\tau) |u(0)\rangle,$$

où $\mathbf{M}(\tau)$ est le propagateur sur un temps τ , $|u(\tau)\rangle$ est la perturbation au temps τ et $|u(0)\rangle$ est la perturbation initiale. Ainsi la perturbation initiale maximisant la mesure peut s'écrire de façon explicite :

$$|u_0\rangle = (2\gamma_1)^{-1} \mathbf{P} (\mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau) |F\rangle - \gamma_2 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}^\dagger |C\rangle), \quad (5.1)$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \pm \frac{1}{2} [& \langle F|\mathbf{M}^\dagger(\tau) \mathbf{P} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau) |F\rangle - \gamma_2 \langle F|\mathbf{M}(\tau) \mathbf{P} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}^\dagger |C\rangle \\ & - \gamma_2 \langle C|\mathbf{P} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau) |F\rangle \\ & - \gamma_2^2 \langle C|\mathbf{P} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}^\dagger |C\rangle]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\gamma_2 = \frac{\langle C|\mathbf{P} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}^\dagger \mathbf{M}^\dagger(\tau) |F\rangle}{\langle C|\mathbf{P} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}^\dagger |C\rangle},$$

et $\mathbf{N} = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{P}$. Cette solution explicite est donc fonction à la fois de τ , le délai après lequel apparaît la croissance transitoire, et de $|F\rangle$ la mesure de la circulation qui subit la croissance transitoire. La mesure $|F\rangle$ est parfois appelée fonction coût. Comme nous l'avons déjà précisé précédemment nous utiliserons deux mesures qui seront propagées à travers l'adjoint du propagateur linéaire comme exprimé dans (5.1). Le reste de (5.1) représente des termes de normalisation ainsi que le retrait du contenu en sel moyen (terme en $|C\rangle$) qui permet d'obtenir une perturbation ayant un contenu total de sel nul. Dans la suite de notre travail, nous allons séparer nos deux études en fonction de chaque mesure. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à maximiser l'intensité de la circulation méridienne océanique. Puis, dans un second temps, nous chercherons à maximiser l'intensité du transport de chaleur.

5.3.1 Intensité de la circulation méridienne

Dans cette étude le résultat de (5.1) est complètement valide. Il convient par contre de définir de façon plus précise la fonction coût ($|F\rangle$), définissant notre mesure de l'intensité de la circulation thermohaline. Nous avons défini $\langle F|U\rangle = \text{Max}(\text{MOC})$ où $|U\rangle$ est le vecteur d'état de notre modèle : $\{\mathbf{u}, T, S\}$ les variables pronostiques des équations primitives dans l'approximation du toit rigide. Puisque $|F\rangle$ est indépendant de $|U\rangle$ nous pouvons facilement linéariser : $\langle F|U\rangle = \langle F|\bar{U}\rangle + \langle F|u\rangle$, où $|\bar{U}\rangle$ est le vecteur d'état de l'état d'équilibre et $|u\rangle$ le vecteur d'état de la perturbation. Ayant défini la fonction coût, la solution explicitée en (5.1) n'est fonction que du délai de croissance τ . Il convient alors de regarder pour quel délai la croissance ($\langle F|\mathbf{M}(\tau)|u_0\rangle / \langle u_0|\mathbf{S}|u_0\rangle$) est maximale. Comme le montre l'encart en haut à droite de la Fig. 5.3, une croissance maximale apparaît pour un délai de 10.5 yr. Nous choisissons d'étudier l'optimal correspondant. La structure optimale de salinité de surface est une anomalie localisée dans les mers d'Irminger, Groënland et Arctique (Fig. 5.3 à gauche). Une intégration temporelle du modèle linéaire tangent initialisé par cette perturbation optimale induit une modification de l'intensité de la cellule méridienne de l'ordre de 0.064 Sv (Fig. 5.3 en bas à droite). Cette faible réponse est toute relative puisque la salinité est une concentration et qu'ici la perturbation de SSS correspond à une couche de 10 m de profondeur (50 m pour le chapitre 3 et 100 m pour le chapitre 4).

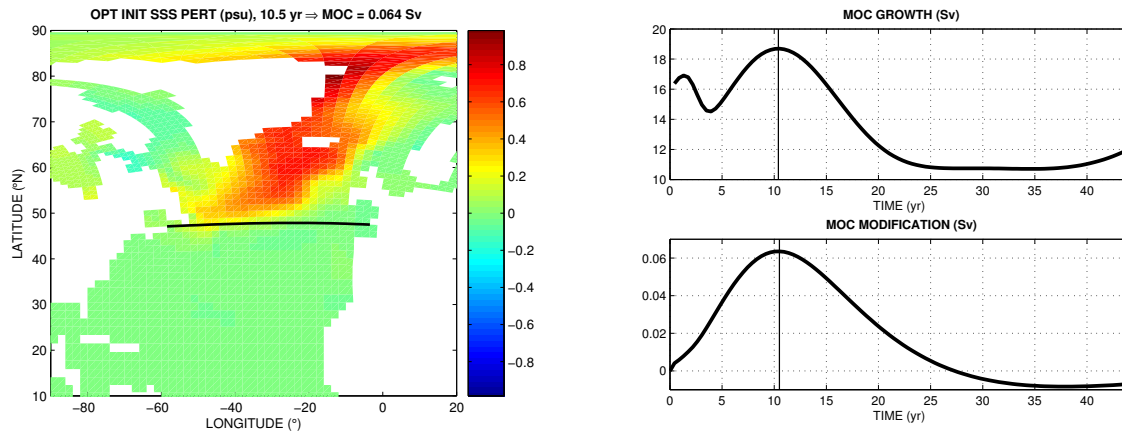


FIG. 5.3 – À gauche, la perturbation de la salinité de surface (SSS) conservant le contenu de sel et qui modifie le plus l'intensité de la circulation méridienne (MOC) après 10.5 yr. La perturbation optimale est normalisée à un maximum de 1 psu pour la représentation. La latitude du maximum de la fonction courant représentant la MOC est dénotée par le trait plein. En haut à droite, croissance de la MOC ($\langle F|\mathbf{M}(\tau)|u_0\rangle / \langle u_0|\mathbf{S}|u_0\rangle$) en fonction du délai (τ) de la croissance transitoire. Un maximum de croissance transitoire apparaît pour un délai de 10.5 yr (trait vertical). En bas à droite, l'intensité de la MOC lors de l'intégration temporelle du modèle linéaire initialisée par la perturbation optimale de SSS (pour un maximum de 1 psu). Une croissance transitoire apparaît bien à 10.5 yr (trait vertical) entraînant une modification de l'intensité de la MOC de 0.064 Sv.

Une question qui subsiste après cette analyse est : comment une perturbation de salinité de surface située au nord du bassin peut-elle influencer la circulation méridienne ? Pour essayer de comprendre les mécanismes intrinsèques à cette croissance en temps fini nous proposons d'étudier le champ des anomalies à l'instant du maximum de croissance (Fig 5.4).

Dans un premier temps nous allons effectuer quelques calculs d'échelles sur l'état des perturbations afin de mieux définir le régime dans lequel évoluent les anomalies. Nous obtenons ainsi que les nombres de Rossby (Ro), d'Ekman horizontal (Ek_H) et vertical (Ek_V), dans nos expériences linéaires, sont :

$$\begin{aligned} \text{Ro} &= \frac{\bar{U}}{fL} \simeq 10^{-3} \ll 1, \\ \text{Ek}_H &= \frac{\nu_H}{fL^2} \simeq 10^{-2} \ll 1, \\ \text{Ek}_V &= \frac{\nu_V}{fH^2} \simeq 1, \end{aligned}$$

où $\bar{U} \simeq 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ ordre de grandeur des vitesses moyennes (Ro étant le rapport des termes d'advection – non-linéaires – sur ceux de Coriolis, son expression pour les équations linéarisées fait intervenir l'ordre de grandeur des vitesses moyennes), $L \simeq 10^5 \text{ m}$ ($H \simeq 10^3 \text{ m}$) l'ordre de grandeurs des dimensions horizontales (verticales) des anomalies, $f=10^{-4} \text{ s}^{-1}$ paramètre de Coriolis et $\nu_{H(V)} \simeq 10^4 (10^2) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ le coefficient horizontal (vertical) de viscosité turbulente. Ces calculs induisent que les termes non-linéaires linéarisés et les termes horizontaux de viscosité turbulente sont négligeables devant les termes de Coriolis. Mais ils montrent aussi que les termes verticaux de viscosité turbulente ne le sont pas. Néanmoins, la mesure de ν_V dans nos expériences est fortement variable dans l'espace, 100 étant sa valeur à son maximum (les courants de bord ouest, notamment le Gulf Stream). Dans le reste du bassin la mesure de la viscosité turbulente est d'un ordre inférieur à ce maximum, et jusqu'à deux ordres inférieurs par endroit. Ceci veut dire que le nombre d'Ekman vertical est donc généralement inférieur à 1 sauf à quelques endroits où il est d'ordre 1. Étant donné que nos perturbations ne sont pas spécifiquement localisées dans les zones de forte viscosité turbulente, nous nous limiterons à un raisonnement pour un nombre d'Ekman vertical faible. Ainsi, nous nous trouvons dans le cadre d'une dynamique des anomalies principalement géostrophique (conclusion équivalente à celle de Lazar, 1997). Les vitesses sont alors orthogonales aux gradients de densité. Cette effet est visible sur les champs de vitesse et de densité (Fig. 5.4).

Ce contexte dynamique étant fixé, il est maintenant possible de tirer quelques conclusions au vu des champs de température et de salinité. Un premier résultat est que le gradient zonal des anomalies de densité est principalement contrôlé par les anomalies de température (quasi absence de gradient zonal des anomalies de salinité) alors que le gradient méridien des anomalies de densité est lui principalement contrôlé par les anomalies de salinité (de la même façon, il y a une quasi absence de gradient méridien des anomalies de température). Alors, l'état des gradients d'anomalies montre que l'augmentation de l'intensité de la circulation méridienne est principalement due à l'anomalie de gradient zonal de la température. Cependant, notre perturbation initiale était une anomalie positive de salinité de surface au nord du bassin Atlantique, induisant principalement un

gradient méridien de densité. À ce stade, il nous faut comprendre comment cette anomalie de salinité a pu entraîner un gradient zonal de température, comme celui présent à 10.5 yr, et ainsi augmenter la circulation méridienne.

Maintenant nous allons noter quelques caractéristiques de l'état moyen. En effet, il est important de remarquer que, le long de la latitude 48°N, c'est la température qui domine le gradient zonal de densité (Fig. 5.5 à gauche). Ce gradient peut être schématisé par une augmentation de la température du bord ouest vers le centre du bassin suivie d'une faible diminution en se rapprochant du bord est (Fig. 5.5 en haut à gauche). Nous pourrions, en outre, noter que cette inversion du gradient zonal est très faible, voir inexistante, pour la salinité moyenne.

La perturbation initiale correspond quant à elle à une anomalie de salinité de surface positive dans le nord du bassin Atlantique. Ce type de perturbation induit une anomalie du gradient méridien de densité positif à 48°N :

$$SSS'_{\text{north}} > 0 \Rightarrow \partial_{\theta} S' > 0 \Rightarrow \partial_{\theta} \rho' > 0,$$

où θ est la latitude, S' (SSS') sont les anomalies de salinité (de surface), ρ' sont les anomalies de densité. Ceci induit par la relation du vent thermique un gradient vertical de vitesses zonales positif :

$$\frac{1}{a} \partial_{\theta} \rho' = \frac{\rho_0 f}{g} \partial_z u' > 0,$$

où a est le rayon de la terre, z est la profondeur, ρ_0 est la densité de référence, f est le paramètre de Coriolis, g est l'accélération de gravité et u' sont les anomalies de vitesses zonales. Cette dernière relation entraîne une anomalie positive de vitesses zonales à la surface ($u'_{\text{fond}} < 0$ et $u'_{\text{surf}} > 0$) (les pointillés à droite de la Fig. 5.5). Cette anomalie des vitesses zonales avec les gradients zonaux moyens, ici principalement le gradient zonal de température moyenne (traits pleins à droite de la Fig. 5.5), induit l'apparition d'anomalies de température :

$$\partial_t T' = -u' \frac{1}{a \cos \theta} \partial_{\phi} \bar{T} + \dots$$

où T' est l'anomalie de température, $\bar{T}$ est la température moyenne et ϕ est la longitude. Étant donné la forme du gradient zonal de température moyenne en fonction de la longitude (un gradient positif suivi d'un gradient négatif), sa dérivée longitudinale s'annule. Ainsi, l'anomalie de température induite par les anomalies d'advection zonale est négative à l'ouest et positive à l'est, ce qui correspond à un gradient zonal positif (tirets à droite de la Fig. 5.5).

Un autre mécanisme se superpose de façon constructive à celui décrit ci-dessus. Le fait de créer une anomalie de vitesse vers l'est près du bord ouest crée une anomalie de vitesse verticale positive afin de respecter la non-divergence du fluide. Cette anomalie de vitesse verticale induit une remontée des eaux froides le long du bord ouest. Comme visible dans les champs d'anomalies à 10.5 yr (Fig. 5.4), l'anomalie positive de vitesses zonales fait intervenir des vitesses verticales positives le long du bord ouest. Cela induit une anomalie d'eaux froides en surface du fait du gradient vertical de température moyenne positif

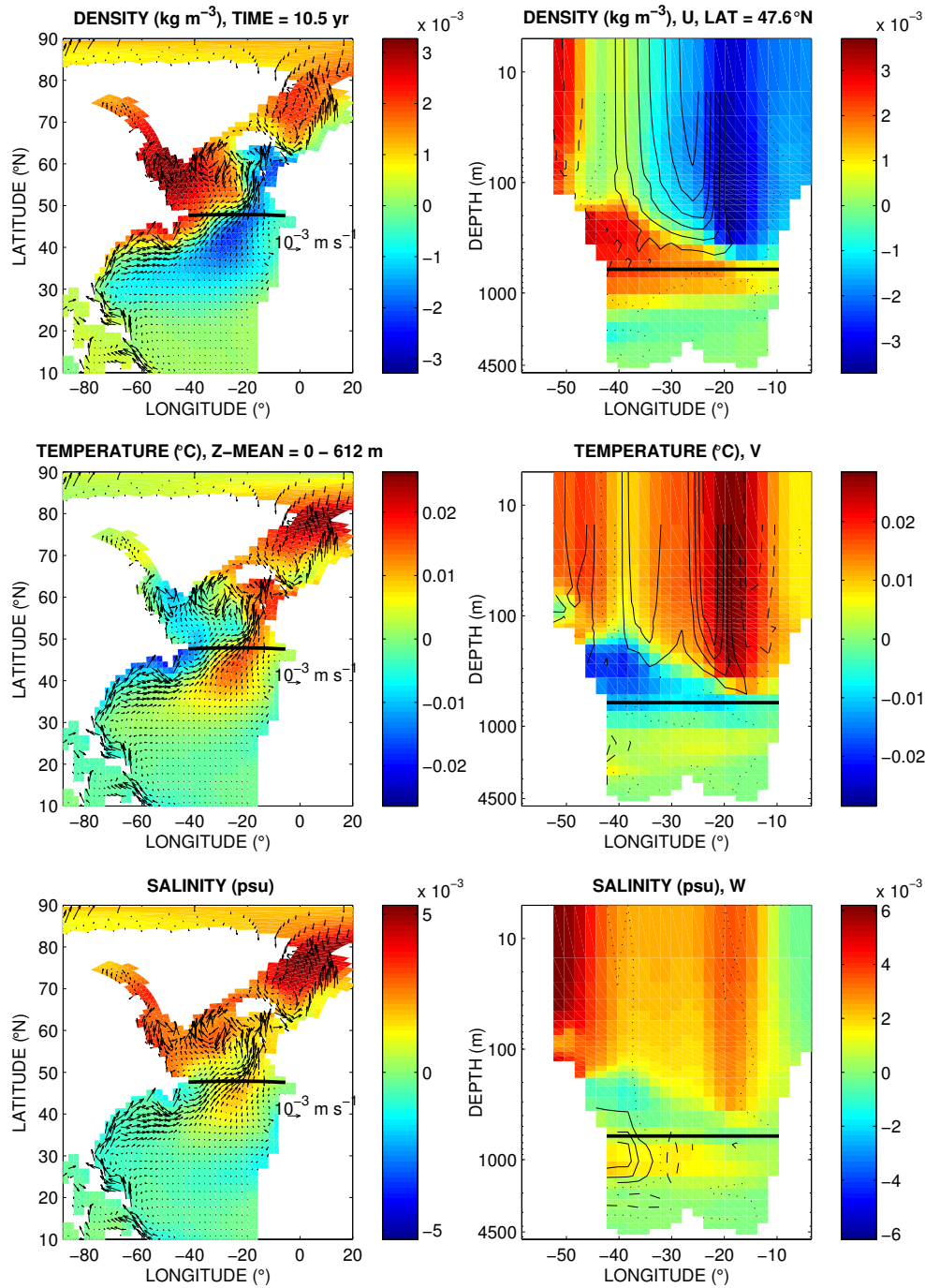


FIG. 5.4 – Instantané à 10.5 yr de l'intégration temporelle du modèle linéaire initialisé par la salinité de surface optimale de l'intensité de la circulation méridienne. À gauche moyenne entre 0 et 612 m (profondeur du maximum de la fonction courant méridienne) de la densité (en haut), de la température (au centre) et de la salinité (en bas), et le champ de vitesses horizontales. À droite, section à 48°N (latitude du maximum de la fonction courant méridienne) de la densité (en haut), de la température (au centre) et de la salinité (en bas) superposée au champ de vitesses zonales, méridiennes et verticales (ce dernier est moyenné sur 20° de latitude). Les traits pleins, tirés et pointillés représentent les anomalies positives, négatives et nulles. L'intervalle de contours est pour les vitesses horizontales et verticales de $5 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$ et $1 \times 10^{-9} \text{ m s}^{-1}$. Le trait plein gras indique la latitude et la profondeur du maximum de la fonction courant méridienne.

($\partial_t T' = -w' \partial_z \bar{T} + \dots$ où w' est l'anomalie de vitesse verticale). Dans cette région, le gradient vertical de salinité moyenne est négligeable vis-à-vis de celui de température. C'est pourquoi il n'y a qu'une faible signature de l'anomalie de salinité sur l'anomalie de densité ainsi créée. Cette remontée d'eau froide est un mécanisme renforçant l'apparition du gradient zonal positif de température.

L'apparition d'une anomalie froide de surface à l'ouest du bassin ainsi que d'une anomalie chaude de surface à l'est entraîne un mouvement méridien vers le nord en surface (tirets à droite de la Fig. 5.5) et un mouvement méridien vers le sud en profondeur par la relation du vent thermique :

$$\frac{1}{a \cos \theta} \partial_\phi \rho' = -\frac{\rho_0 f}{g} \partial_z v',$$

où v' sont les anomalies de vitesses méridiennes. D'après notre analyse précédente, comme d'après l'intégration temporelle à 10.5 yr, nous avons $|\partial_\phi T'| \gg |\partial_\phi S'|$. Nous obtenons donc :

$$\frac{1}{a \cos \theta} \partial_\phi T' = \frac{f}{g\alpha} \partial_z v',$$

où α le coefficient d'expansion thermique. Dans le cas présent, avec $\partial_\phi T' > 0$, nous obtenons $\partial_z v' > 0$. Cette relation peut être schématisée comme un mouvement couches où $v'_{\text{fond}} < 0$ et $v'_{\text{surf}} > 0$ et où H_{surf} et H_{fond} définissent les épaisseurs des couches.

Cherchons à comprendre comment ce mouvement barocline modifie la circulation méridienne. Dans notre cadre, l'anomalie de circulation océanique méridienne (ψ') peut s'écrire comme :

$$\psi' = - \int_{\phi_{\text{west}}}^{\phi_{\text{east}}} a \cos \theta \, d\phi \int_z^0 dz \, v',$$

où ϕ_{west} et ϕ_{east} sont les longitudes à la limite ouest et est du bassin Atlantique (supposées, ici, indépendantes de z) et H sa profondeur. Le mouvement étant barocline, le maximum de la fonction courant (ψ'_{max} , mesurant l'intensité de la circulation) apparaît sous la première couche :

$$\begin{aligned} \psi'(z) = \psi'_{\text{max}} &\Leftrightarrow \partial_z \psi'(z) = 0, \\ &\Leftrightarrow v'(z) = 0, \\ &\Leftrightarrow z = H_{\text{surf}}. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\psi'_{\text{max}} = \int_{\phi_{\text{west}}}^{\phi_{\text{east}}} a \cos \theta \, d\phi \, v'_{\text{surf}} H_{\text{surf}}.$$

Cette dernière relation nous permet d'écrire la relation de proportionnalité :

$$\psi'_{\text{max}} \propto v'_{\text{surf}}.$$

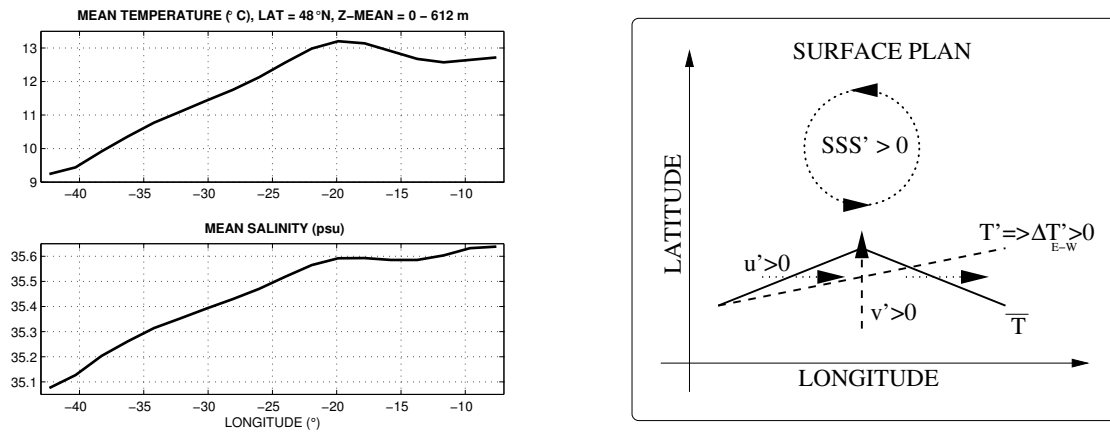


FIG. 5.5 – À gauche, température et salinité le long de la section 48°N dans l'Atlantique nord. Le gradient de densité est dominé par la température le long de cette section, où le profil de température peut être schématisé comme une croissance suivie d'une décroissance. À droite, schéma du mécanisme permettant à une anomalie positive de salinité de surface située au nord du bassin d'augmenter l'advection de surface vers le nord, et donc l'intensité de la circulation méridienne, représentée au travers d'une coupe de surface de l'océan. Les pointillés, les tirets et les traits pleins représentent respectivement l'anomalie de salinité ainsi que l'anomalie d'advection zonale de surface qu'elle induit, le profil de l'anomalie d'iso-température ainsi que l'anomalie d'advection méridienne de surface en découlant, et le profil d'iso-température moyenne.

Ainsi, l'apparition d'un gradient zonal de température positif entraîne une augmentation de la cellule de circulation méridienne : $\psi'_{\max} \propto \partial_{\phi} T'$.

Étant donné l'état moyen, nous avons pu exprimer une relation entre les anomalies du gradient méridien de salinité et l'intensité de la cellule méridienne *via* les anomalies du gradient zonal de température : $\psi'_{\max} \propto \partial_{\phi} T' \propto \partial_{\theta} S'$. Nous obtenons une relation entre l'anomalie de salinité de surface située au nord du bassin Atlantique et l'intensité de la cellule de circulation méridienne : $\psi'_{\max} \propto SSS'_{\text{north}}$.

Le dernier résultat de cette étude correspond au fait que, puisque nous étudions la perturbation de salinité de surface optimale, nous savons qu'aucune autre perturbation de salinité de surface n'aura autant d'impact sur l'intensité de la circulation méridienne. Ce type d'étude permet de fixer une borne maximum à l'impact de la salinité de surface sur l'intensité de circulation. Les données sur les *Great Salinity Anomalies* de Belkin et al. (1998) révèlent un maximum de modifications de la salinité de surface dans l'Atlantique nord de 0.5 psu sur 250 m. Nous obtenons alors une modification de l'intensité de circulation de 0.75 Sv. Ceci correspond à une modification de 11% de la circulation moyenne.

5.3.2 Intensité du transport de chaleur méridien

De la même façon que pour l'étude du maximum de circulation méridienne, la solution (5.1) reste valide pour l'étude du maximum de transport de chaleur. Nous définissons juste différemment la fonction coût $|F\rangle$ afin qu'elle représente l'intensité du transport de chaleur méridien. Le transport de chaleur méridien (MHT) n'est pas un opérateur linéaire du vecteur d'état de notre modèle $(\{\mathbf{u}, T, S\})$, puisqu'il s'écrit :

$$\text{MHT} = \rho_0 C_p \int_{\phi_{\text{west}}}^{\phi_{\text{east}}} a \cos \theta \, d\phi \int_{-H}^0 dz \, vT,$$

où C_p est la capacité calorifique de l'eau de mer. Son expression pour les perturbations ne s'écrit donc pas de la même façon que pour le vecteur d'état. Ainsi, en posant $|U\rangle = |\bar{U}\rangle + |u\rangle$, où $|\bar{U}\rangle$ dénote l'état moyen et $|u\rangle$ les perturbations, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{MHT} &= \rho_0 C_p \int_{\phi_{\text{west}}}^{\phi_{\text{east}}} a \cos \theta \, d\phi \int_{-H}^0 dz \, (\bar{v}\bar{T} + \bar{v}T' + v'\bar{T} + v'T'), \\ &= \overline{\text{MHT}} + \text{MHT}' + \text{MHT}''. \end{aligned}$$

Le transport de chaleur se décompose alors en un terme moyen, un terme linéaire et un terme quadratique selon les perturbations. Ainsi, en négligeant le dernier puisqu'il est du second ordre, nous obtenons l'opérateur linéaire du transport de chaleur des perturbations :

$$\text{MHT}' = \rho_0 C_p \int_{\phi_{\text{west}}}^{\phi_{\text{east}}} a \cos \theta \, d\phi \int_{-H}^0 dz \, (\bar{v}T' + v'\bar{T}).$$

Enfin, nous prendrons $\langle F|u \rangle$ comme la valeur de l'anomalie de transport de chaleur à la latitude du maximum de transport de chaleur de l'état moyen, c'est-à-dire pour notre état moyen à 27°N (Fig. 5.1). Maintenant que nous avons défini notre fonction coût, comme $\text{MHT}'(\theta=27^\circ\text{N})$, il convient de l'injecter dans (5.1) et de regarder la dépendance des solutions en fonction du délai τ . Le calcul montre un maximum de croissance pour un délai de 2.2 yr (Fig. 5.6 en haut à droite). La forme de la salinité de surface conservant le sel et maximisant le transport de chaleur après 2.2 yr correspond à une forte anomalie positive de salinité dans les mers du Labrador et d'Irminger et à une anomalie, d'un ordre plus faible, située entre 15 et 30°N dans la moitié ouest du bassin Atlantique (Fig. 5.6 à gauche). Cette dernière anomalie change une fois de signe entre -60 et -35° de longitude et n'en change pas sur la latitude. Une intégration temporelle du modèle linéaire perturbé par cette anomalie optimale de salinité de surface induit une croissance après 2.2 yr de 2.4×10^{-3} PW (Fig. 5.6 en bas à droite) comme prévu par la solution extraite de (5.1). Cette anomalie de transport de chaleur est obtenue par la modification du terme en $v'\bar{T}$ qui est d'un ordre supérieur à celui en $\bar{v}T'$. Ceci montre que la salinité de surface modifie préférentiellement le transport de chaleur par le terme des anomalies d'advection de la température moyenne. Ainsi la modification du transport de chaleur par notre anomalie de salinité de surface optimale est induite par une modification des anomalies d'advection méridienne. Nous allons chercher à identifier et comprendre les mécanismes permettant une telle modification.

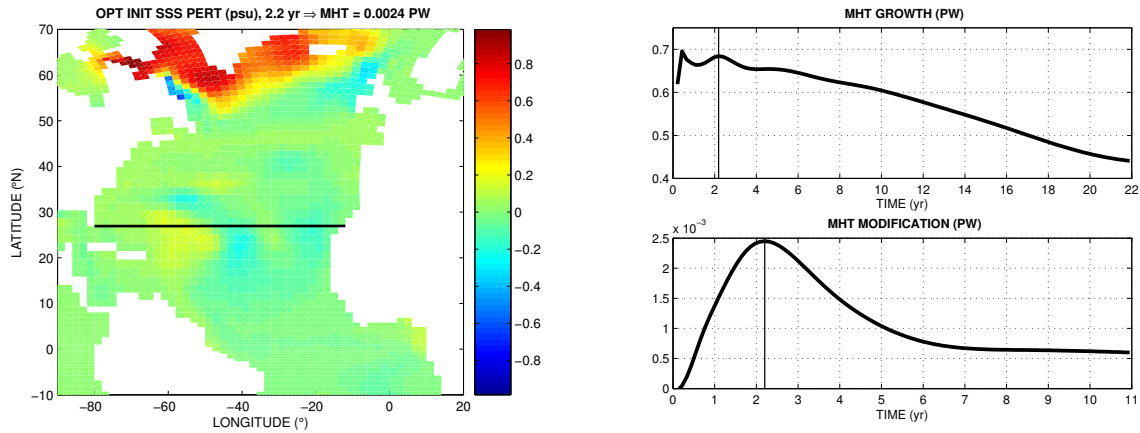


FIG. 5.6 – Comme la Fig. 5.3 pour le maximum de croissance du transport de chaleur (MHT). La latitude du maximum de MHT est dénotée par le trait plein. Un maximum local apparaît pour un délai de 2.2 yr (traits verticaux) et entraîne une modification de 0.0024 PW.

Le premier résultat du champ des anomalies à 2.2 yr (Fig. 5.7) est que le régime correspond encore à $\text{Ro} \ll 1$, $\text{Ek}_H \ll 1$ et $\text{Ek}_V \sim 1$. Comme dans l'étude précédente et pour les mêmes raisons, bien que les termes verticaux de viscosité turbulente soient non négligeables devant les termes de Coriolis, nous supposons le régime comme principalement géostrophique. Les anomalies de vitesses sont alors orthogonales aux gradients des

anomalies de densité.

De plus, l'anomalie de salinité positive dans la mer du Labrador est parfaitement compensée par une anomalie de température positive. Ceci n'induit donc aucune modification du champ de densité et donc des anomalies de vitesses. L'augmentation du transport de chaleur n'est donc aucunement liée à l'anomalie positive de la salinité de surface dans la mer du Labrador.

Le deuxième résultat est que l'augmentation des vitesses méridiennes, induisant une augmentation du transport de chaleur, se fait de façon extrêmement locale à l'ouest du bassin. Ces vitesses méridiennes sont orthogonales à un gradient zonal des anomalies de température qui apparaît, lui aussi, de manière locale dans l'ouest du bassin Atlantique.

À ce stade de l'étude il semble que, comme précédemment, les anomalies de vitesses méridiennes sont engendrées par un gradient zonal des anomalies de température lui-même engendré par nos anomalies de salinité. C'est pourquoi, à l'image de l'étude précédente, nous allons identifier comment les anomalies de salinité de surface ont pu engendrer l'augmentation du transport de chaleur *via* les gradients zonaux des anomalies de température.

À l'instant initial, l'anomalie de salinité de surface présente un gradient zonal entre -60 et -35° de longitude autour de 27°N de latitude. Cette anomalie se propage pendant les 2.2 yr avant l'apparition du maximum de croissance du transport de chaleur. Cette propagation correspond parfaitement au transport moyen (Fig. 5.8 à droite). De plus, l'advection moyenne étant d'un ordre plus forte au sud ($\sim 2.2 \text{ cm s}^{-1}$ vers l'ouest, Fig. 5.8 à gauche) qu'au nord ($\sim 0.5 \text{ cm s}^{-1}$ vers l'ouest) de 27°N , ceci a pour effet non seulement de déplacer l'anomalie de salinité de surface, mais aussi de tourner le gradient des anomalies de salinité. Après 2.2 yr, l'anomalie de salinité induit un gradient méridien de densité positif autour de 27°N (latitude du maximum de transport de chaleur).

La suite du raisonnement est équivalente à celle de l'étude précédente. Par la relation du vent thermique :

$$\frac{1}{a}\partial_\theta\rho' = \frac{\rho_0 f}{g}\partial_z u' > 0,$$

une vitesse zonale vers l'est apparaît en surface. À l'image de l'étude précédente, un gradient thermique positif puis négatif, en s'éloignant du bord ouest, existe sur l'état moyen. Mais maintenant, celui-ci n'est plus d'aussi grande échelle, il est localisé dans la zone ouest du bassin. Ainsi l'interaction des anomalies d'advection zonale avec le gradient de température moyenne induit une anomalie localisée sur le bord ouest. Cette anomalie correspond à un gradient positif de température.

Ce gradient est renforcé par le fait qu'une anomalie de vitesses verticales positives à l'ouest est induite par l'anomalie d'advection zonale vers l'est et à la non-divergence. Alors, à cause du gradient positif de température verticale de l'état moyen, une remontée des eaux froides intervient sur le bord ouest et une anomalie d'eau froide apparaît en surface.

Ces deux effets construisent un gradient zonal positif d'anomalie de température. Ce gradient de température induit une advection méridienne par la relation du vent ther-

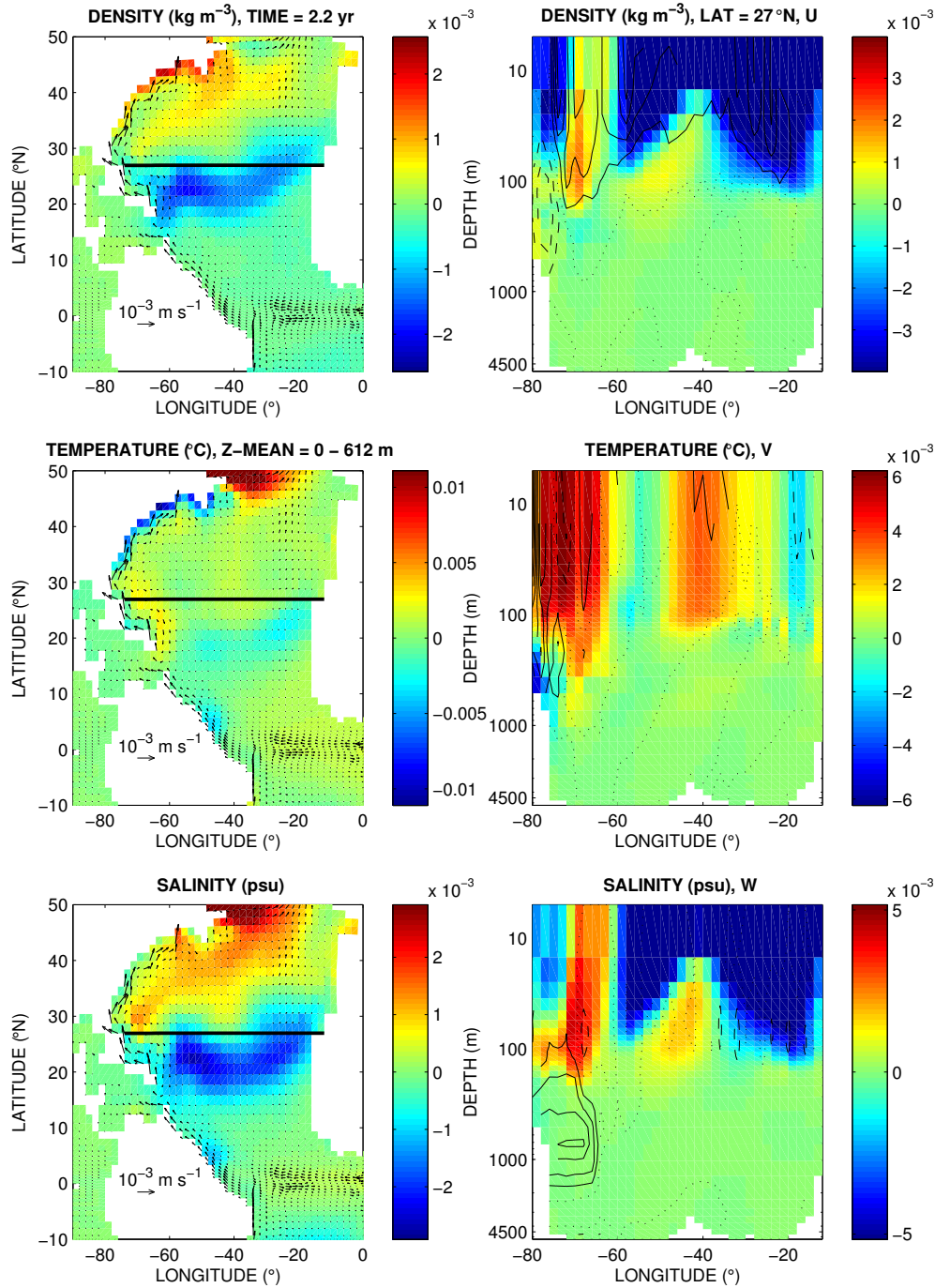


FIG. 5.7 – Comme la Fig. 5.4 pour un instantané, après 2.2 yr, de l'intégration temporelle du modèle linéaire initialisé par la salinité de surface modifiant le plus le maximum de transport de chaleur. La latitude du maximum de la circulation méridienne est dénotée par le trait plein. À gauche, la moyenne est entre 0 et 612 m (profondeur de la base des anomalies). À droite, la section est à 27°N (latitude du maximum du transport de chaleur). L'intervalle des contours des vitesses horizontales et verticales est respectivement de $5 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$ et de $5 \times 10^{-9} \text{ m s}^{-1}$.

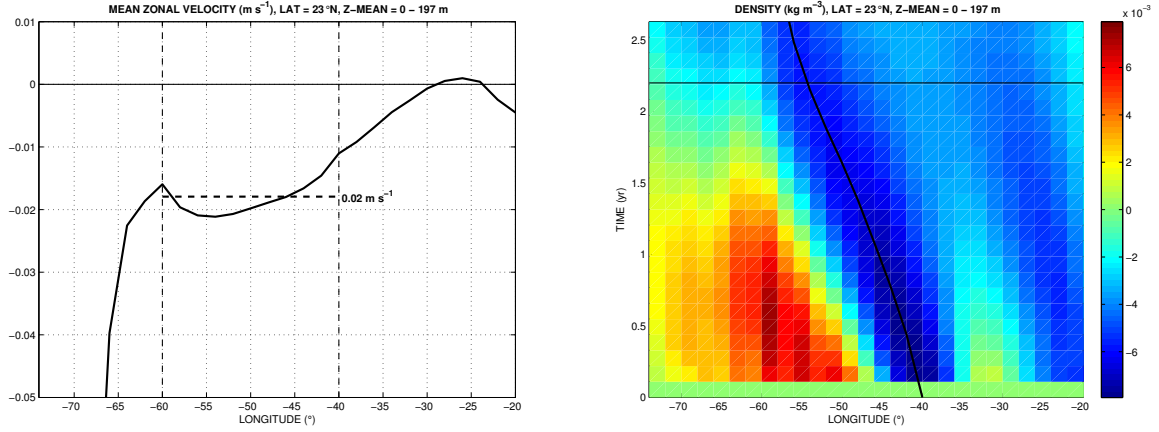


FIG. 5.8 – À gauche, profil des vitesses zonales de l'état moyen moyenné de 0 à 197 m (profondeur d'expansion des anomalies de salinité) le long d'une section au sud du maximum de transport de chaleur (23°N). La vitesse moyenne de l'état moyen entre les longitudes -40 à -60° est de 2.2 cm s⁻¹. À droite, diagramme espace-temps des anomalies de densité moyenné entre 0 à 197 m le long de la section 23°N, pour une intégration temporelle linéaire perturbée par la salinité de surface optimale (normalisée à un maximum de 1 psu). La propagation des anomalies est principalement due à l'advection zonale moyenne (trait plein). Le trait plein horizontal dénote le temps (2.2 yr) où le maximum de transport de chaleur atteint son maximum.

mique :

$$\frac{1}{a \cos \theta} \partial_{\phi} T' = \frac{f}{g\alpha} \partial_z v' > 0.$$

Cette relation nous indique l'existence de vitesses méridiennes vers le nord, en surface, et vers le sud, au fond ($v'_{\text{surf}} > 0$ et $v'_{\text{fond}} < 0$). Le transport de chaleur peut alors être synthétisé en

$$\text{MHT}' = \rho_0 C_p \int_{\phi_{\text{west}}}^{\phi_{\text{east}}} a \cos \theta d\phi \quad (v'_{\text{surf}} \bar{T}_{\text{surf}} H_{\text{surf}} + v'_{\text{fond}} \bar{T}_{\text{fond}} H_{\text{fond}}),$$

où H_{surf} et H_{fond} sont, comme précédemment, les épaisseurs des couches correspondant respectivement aux vitesses de surface et de fond, et $\bar{T}_{\text{surf}}$ et $\bar{T}_{\text{fond}}$ les températures moyennes correspondantes. Or puisqu'une anomalie de densité ne peut induire qu'un mouvement barocline nous avons : $v'_{\text{surf}} H_{\text{surf}} + v'_{\text{fond}} H_{\text{fond}} = 0$. Cette relation nous permet de réécrire l'anomalie du transport de chaleur comme suit :

$$\text{MHT}' \simeq \rho_0 C_p \int_{\phi_{\text{west}}}^{\phi_{\text{east}}} a \cos \theta d\phi \quad v'_{\text{surf}} H_{\text{surf}} (\bar{T}_{\text{surf}} - \bar{T}_{\text{fond}}).$$

Dans l'état moyen nous avons $\bar{T}_{\text{surf}} > \bar{T}_{\text{fond}}$. Nous obtenons alors :

$$\text{MHT}' \propto v'_{\text{surf}}.$$

Nous avons montré la relation entre le gradient méridien d'anomalie de salinité et le gradient zonal d'anomalie de température ($\partial_\phi T' \propto \partial_\theta S'$), la relation entre le gradient zonal d'anomalie de température et l'anomalie de vitesse méridienne de surface ($v'_{\text{surf}} \propto \partial_\phi T'$), la relation entre l'anomalie de vitesse méridienne de surface et l'anomalie de transport de chaleur méridien ($\text{MHT}' \propto v'_{\text{surf}}$). Nous arrivons alors à la relation entre le gradient méridien d'anomalie de salinité et l'anomalie de transport de chaleur méridien : $\text{MHT}' \propto \partial_\theta S'$.

Dans un dernier temps nous nous proposons, comme précédemment, de chiffrer la borne supérieure de l'anomalie de transport de chaleur qui peut être attendue dans l'océan. Ainsi, puisque les *Great Salinity Anomalies* révèlent un maximum de modification de la salinité de surface dans l'Atlantique nord de 0.5 psu sur 250 m, on obtient une modification du transport de chaleur de 0.03 PW. Ceci correspond à une modification de 5.4% du transport de chaleur moyen.

5.4 Conclusion

Comme dernière gradation de notre étude, nous avons appliqué notre méthodologie, mise en place dans la première partie de ce chapitre, dans un modèle de circulation générale réaliste. À l'image des deux sections précédentes, nous nous sommes proposés d'identifier et de quantifier les mécanismes physiques entraînant des modifications de la circulation océanique. Deux mesures de la circulation océanique sont plus spécifiquement utilisées : l'intensité de la cellule de circulation méridienne et l'intensité du transport de chaleur. Ces deux mesures ont été choisies pour leur valeur synthétique de la circulation océanique mais aussi pour leur indication quant à la contribution océanique sur le climat, en terme de transport de masse et de chaleur. Ainsi, nous avons évalué les changements de l'intensité de la cellule de circulation méridienne soumise à une perturbation de la salinité de surface. De la même façon, l'impact d'une perturbation de salinité de surface sur le transport de chaleur a été étudié.

Le premier résultat de cette étude est l'existence de croissance transitoire pour les deux mesures choisies. Pour l'intensité de la circulation méridienne, une anomalie de salinité de surface située au nord du bassin Atlantique entraîne une augmentation maximale après un délai de 10.5 yr. Et, pour l'intensité du transport de chaleur, une anomalie de salinité de surface située autour de 27°N (latitude du maximum de transport de chaleur) dans la moitié ouest du bassin Atlantique induit une croissance maximale après un délai de 2.2 yr.

Pour les deux mesures, la croissance transitoire est induite par un gradient méridien de salinité de surface générant des anomalies de vitesses zonales qui, interagissant avec le gradient zonal de température moyenne, engendrent un gradient zonal d'anomalies de température. Ce gradient de température induit une anomalie de vitesse méridienne de surface vers le nord qui modifie, pour la première mesure, l'intensité de la circulation méridienne ou, pour la seconde mesure, l'intensité du transport de chaleur.

Le dernier résultat est l'obtention d'une borne supérieure des modifications induites par une anomalie de salinité de surface sur la circulation océanique. Les perturbations de salinité de surface dans l'Atlantique nord sont de l'ordre de 0.5 psu sur 250 m, comme les *Great Salinity Anomalies* (Belkin et al., 1998). Nous fixons la borne maximum de modification de la circulation méridienne comme de 0.75 Sv et celle du transport de chaleur comme de 0.03 PW.

Cette dernière étude possède une forte différence avec celles des sections précédentes. En effet, pour le modèle de circulation générale réaliste nous n'avons pu obtenir les vecteurs propres de la matrice Jacobienne, du fait de la configuration numérique trop importante du modèle (variables dynamiques $> 3 \times 10^6$). Ces vecteurs régissent la dynamique des perturbations autour de l'état d'équilibre. Cette lacune ne nous a pas permis, par rapport aux sections précédentes, d'analyser aussi facilement les croissances transitoires optimales que nous avons produites lors de cette dernière étude. Une perspective très intéressante pour la compréhension de la dynamique d'un modèle de circulation générale réaliste, et donc par extension de la circulation océanique, serait la diagonalisation du modèle linéaire tangent et adjoint. Les vecteurs propres d'une circulation océanique générale ainsi obtenus seraient intéressants pour non seulement mieux comprendre les croissances transitoires optimales et obtenir les optimaux stochastiques (à l'image des études précédentes), mais aussi et surtout mieux comprendre les modes de réponse de la dynamique océanique globale.

Conclusion

Actuellement, une prise de conscience apparaît autour des liens possibles entre le réchauffement climatique, visible depuis un siècle (Mann et al., 1999), et la pollution atmosphérique due à la forte industrialisation du siècle dernier. En effet, une augmentation caractéristique de la température moyenne atmosphérique et océanique a été observée. Dans ce contexte de mutation du climat, nommé réchauffement global, il convient d'étudier le système climatique afin d'évaluer les conséquences d'un tel changement. Le climat se divise en plusieurs sous-systèmes ayant des caractéristiques différentes : l'atmosphère, la lithosphère, l'hydrosphère, la cryosphère et la biosphère. Les deux compartiments climatiques les plus exposés à l'énergie solaire du fait de leur forte étendue à la surface du globe sont l'atmosphère et l'hydrosphère, notamment la partie océanique de cette dernière. Or, l'atmosphère possède une faible capacité thermique induisant une dynamique d'ajustement relativement rapide (de l'ordre de quelques mois). De son côté, l'océan possède une bien plus forte capacité calorifique et constitue ainsi un énorme réservoir de chaleur avec une dynamique plus lente. Cette capacité calorifique et cette dynamique lente font de l'océan un élément majeur de la dynamique climatique. Plusieurs observations (Curry et al., 2003; Curry et Mauritzen, 2005; Josey et Marsh, 2005) révèlent que les modifications climatiques de ce dernier siècle induisent, entre autres, des modifications des flux d'évaporation-précipitation. Or, ce flux d'eau douce, en changeant la stratification océanique *via* la modification de la salinité de surface des océans, est l'un des forçages de la circulation océanique. Ainsi, nous avons choisi d'étudier la stabilité et la variabilité (d'échelles de temps multi-annuelles à millénaires) de la circulation océanique dans le contexte de modification d'un de ces forçages, le flux d'évaporation-précipitation. Concernant la question de la variabilité océanique, comme pour beaucoup d'autres domaines, deux paradigmes existent et s'opposent. Le premier voudrait que la variabilité soit endogène, c'est-à-dire que le système tire l'énergie nécessaire à soutenir la variabilité par des processus internes (Huck et al., 1999; Gildor et Tziperman, 2001; Arzel et al., 2006; Sévellec et al., 2006; Colin de Verdière et al., 2006). Le deuxième paradigme, quant à lui, veut que la variabilité soit exogène, c'est-à-dire que la variabilité, bien que modulée par des processus internes, trouve l'énergie nécessaire à la maintenir par des stimulations externes au système (marées, variabilité saisonnière, cycle de Milankovitch). Ces deux paradigmes sont clairement distinguables et induisent des raisonnements physiques comme dynamiques complètement différents. Néanmoins, la compréhension d'un mécanisme de variabilité dans un contexte peut parfois permettre la compréhension de la variabilité dans l'autre, comme cela nous est arrivé à plusieurs reprises dans cette thèse.

La première partie de notre étude s'est intéressée à la variabilité endogène. L'étude de ce type de variabilité ne peut être entièrement appréhendée par une analyse linéaire. En effet, la variabilité endogène est toujours reliée à des mécanismes non-linéaires : saturation non-linéaire autour d'un cycle limite d'un mode linéaire croissant, oscillation de relaxation... Deux problèmes ont été abordés dans cette étude sur la variabilité endogène. Ces deux variabilités se distinguent, entre autres, par leurs échelles de temps caractéristiques.

La première oscille sur des échelles centenaires alors que la deuxième oscille sur des échelles millénaires. Le mode centenaire est un mode interne de la circulation thermohaline

oscillant sur un cycle limite autour de l'état d'équilibre. L'oscillation apparaît au travers d'une bifurcation de Hopf lorsque l'intensité du flux d'évaporation-précipitation est augmenté. Après la bifurcation de Hopf, une analyse de stabilité linéaire sur l'état d'équilibre nous a permis d'obtenir un mode linéaire instable oscillant sur une période de 171 yr. Ce mode linéaire a des propriétés, comme sa période ou sa structure en température et salinité, extrêmement proches de celles du mode apparaissant autour de l'état d'équilibre après la bifurcation de Hopf. L'étude a montré que ce mode pouvait être, au premier ordre, considéré comme une anomalie de salinité advectée par le courant moyen. De plus, la convection n'était pas critique à l'existence de ce mode. En outre, un modèle minimal, la boucle d'Howard-Malkus, nous a permis d'obtenir une solution analytique de ce mode. Ceci nous a permis de lier cette oscillation à la rétroaction positive de salinité sur la circulation thermohaline. Un bilan de variance au cours d'une période d'oscillation montre l'existence d'une source d'anomalie de densité *via* le rappel de température de surface. En effet, l'application d'une condition mixte à la surface (rappel à la température atmosphérique et flux d'eau douce) permet de soutenir l'oscillation. Le dernier résultat de cette étude est l'amortissement de l'oscillation, et donc la disparition de la bifurcation de Hopf, dans le cas d'une configuration bihémisphérique en circulation pôle-à-pôle.

L'oscillation millénaire, quant à elle, est une oscillation de relaxation. Ce type d'oscillation correspond à une évolution lente sur deux états avec un passage rapide entre eux. L'étude a montré que ces deux états de l'oscillation ont des propriétés thermohalines très proches de celles des états d'équilibre obtenus pour des intensités du flux d'évaporation-précipitation plus fortes ou plus faibles que celle du régime d'oscillation millénaire. Ainsi, l'oscillation millénaire modifie très fortement la circulation thermohaline au cours de son cycle (l'intensité de la circulation passant de -4 à 15 Sv). Cette modification de la circulation induit de forts changements de transport de chaleur océanique et donc du climat (le flux de chaleur vers l'atmosphère dans les régions du nord passant d'environ -10 à 10 W m⁻²). Il a été montré que le régime d'oscillation millénaire peut apparaître à la suite de deux bifurcations période-infinie de chaque côté de son régime d'existence (défini ici par l'intensité du flux d'évaporation-précipitation). De plus, une variabilité de plus haute fréquence (échelle de temps centenaire) apparaît sur chacun des deux états transitoires de l'oscillation millénaire. La stabilité de ces modes plus hautes fréquences contrôle la période de l'oscillation millénaire. Ainsi, plus ces modes hautes fréquences sont instables, plus la période de l'oscillation millénaire est petite. De la même façon si l'un de ces modes hautes fréquences est stable, l'oscillation millénaire disparaît. De plus, il a été montré que l'augmentation de l'intensité du flux d'évaporation-précipitation entraîne le scénario suivant : l'état d'équilibre se déstabilise *via* une bifurcation de Hopf qui fait apparaître l'oscillation centenaire instable correspondant en une partie d'un cycle plus important, l'oscillation millénaire. Alors, nous pouvons interpréter l'oscillation centenaire comme un précurseur de l'oscillation millénaire.

La deuxième partie de notre étude nous a amené à considérer des modes de variabilité exogène. Ici, la variabilité océanique est une réponse à une perturbation externe choisie comme une perturbation de la salinité de surface, étant donné notre domaine

d'intérêt. Ce type de variabilité peut faire appel à des mécanismes non-linéaires, mais aussi pour de faibles perturbations, où nous restons au voisinage d'un état d'équilibre asymptotiquement stable, à des mécanismes purement linéaires. Ce voisinage même si il existe toujours peut parfois être très restreint. Néanmoins, nous nous sommes limités à l'approximation linéaire étant donné les simplifications méthodologiques qu'elle induit dans notre étude. Dans ce cadre linéaire, l'évolution des perturbations s'écrit *via* la matrice Jacobienne. Cette matrice n'est généralement pas auto-adjointe, le problème est dit non-normal. Ainsi, la matrice Jacobienne décrit comment le système répond, alors que son adjoint correspond à la façon dont le système reçoit l'information. Alors, dans le cadre d'une étude de perturbations, et notamment ici par la salinité de surface, les deux termes ont leur importance comme le montrent tous les résultats analytiques de notre travail.

Dans le premier temps de cette étude de la variabilité endogène, nous avons mis en place une méthode pour calculer les perturbations optimales dans trois cadres. Ainsi, nous avons pu évaluer les perturbations initiales, constantes et stochastiques de salinité de surface induisant respectivement la plus grande modification de la circulation océanique dans un temps fini, de la circulation en régime permanent et de la variance de la circulation. Dans ce type d'étude, il apparaît une dépendance à la mesure de la circulation océanique. Nous avons choisi deux mesures : une norme quadratique mesurant la distance de la perturbation à zéro et une norme linéaire l'intensité de la circulation méridienne. L'utilisation de la deuxième mesure fait apparaître des solutions explicites pour l'étude des perturbations initiales et constantes. De plus étant donné la signification physique de cette mesure, la compréhension des résultats apparaît naturellement. Dans un modèle de circulation thermohaline 2D latitude-profondeur, représentant un océan zonalement ajusté, nous avons trouvé une croissance en temps fini à 67 yr reliée à la croissance du mode centenaire. Il a aussi été montré l'apparition d'un pic dans la puissance spectrale de la réponse au forçage optimal de salinité de surface. Ce pic localisé à 150 yr correspond à la réponse du mode centenaire avec une intensité fortement contrôlée par les non-normalités de notre système. Ce résultat est différent de celui Tziperman et Ioannou (2002) qui, du fait d'une mauvaise estimation de la période de leur mode linéaire le moins amorti, prospecte sur des fréquences éloignées de celle du mode oscillant. Lors de cette étude nous avons restreint la matrice Jacobienne et son adjoint à une somme incomplète de quelques uns de leurs vecteurs propres les moins amortis. Cette réduction suffit à reproduire l'essentielle de la dynamique linéaire de notre modèle et ainsi à retrouver les perturbations optimales et les réponses non-normales.

Dans le deuxième temps, notre étude sur les perturbations optimales de salinité de surface influençant le plus la circulation océanique est étendue à un modèle planétaire-géostrophique 3D. Dans cette étude nous n'avons utilisé que la mesure de l'intensité de la circulation méridienne étant donné sa plus forte signification physique et climatique. Le premier résultat de cette étude est l'apparition d'une forte dépendance des perturbations optimales et de leur réponse au choix de la physique des conditions limites de surface, c'est-à-dire au choix de forcer la température et la salinité par un flux de chaleur et un flux d'eau douce ou par un rappel sur la température atmosphérique et un flux d'eau douce. En effet, le choix du rappel sur la température annihile la variabilité multidécennale alors

que l'état d'équilibre est strictement le même (Huck et Vallis, 2001; Arzel et al., 2006). Ainsi, il ne suffit pas de bien représenter la circulation océanique et le champ de densité qui lui est lié, mais il faut avant tout bien représenter la physique des interactions océan-atmosphère. Ce résultat est généralisable à l'utilisation de rappel dans la masse (*i.e.* rappel du champ de température et de salinité à des valeurs climatologiques). Cette utilisation est très critiquable, tant ce rappel peut influencer la dynamique sans qu'aucun fondement physique ne l'autorise. Le second résultat de cette étude est l'apparition de la variabilité multidécennale de l'Atlantique. En effet, cette variabilité domine le spectre de réponse stochastique. Ainsi, la variabilité multidécennale de l'Atlantique est un mode efficace sur le changement de la circulation océanique méridienne et possède donc un impact potentiel sur le climat.

Dans le troisième et dernier temps de l'étude de la variabilité exogène, nous avons choisi d'étudier la croissance en temps fini de l'intensité de la circulation méridienne ainsi que celle du transport de chaleur méridien dans l'Atlantique nord. Cette dernière étude est une étape importante de notre travail, quant au réalisme des modèles océaniques étudiés, puisqu'elle a été réalisée avec un modèle de circulation océanique aux équations primitives (OPA) en configuration réaliste globale (ORCA2, 2° de résolution). Dans cette étude deux mécanismes de croissance transitoire induite par des perturbations de salinité de surface ont été trouvés. Le premier correspond à une anomalie de salinité de surface positive située dans l'Atlantique au nord de 50°N. Cette perturbation induit une augmentation de l'intensité de la circulation méridienne de l'Atlantique nord 10.5 yr après son application. Le deuxième est une anomalie de salinité localisée dans l'Atlantique autour de 27°N changeant de signe sur la longitude avec une composante positive au nord de 55°N. Cette perturbation induit une augmentation de l'intensité du transport de chaleur dans l'Atlantique nord 2.2 yr après son application. Dans les deux cas c'est un gradient méridien de salinité zonale qui induit une anomalie du gradient zonal de température qui, lui-même, entraîne des vitesses méridiennes de surface. Cette modification des vitesses zonales est responsable de l'augmentation respective de la circulation méridienne ou du transport de chaleur. En outre, ce dernier résultat montre que le transport de chaleur est plus efficacement modifié par des perturbations des vitesses méridiennes que par des changements du champ de température.

Un point commun entre nos trois différentes études sur la variabilité exogène de la circulation océanique est l'existence de croissances non-normales. Nous avons vérifié dans le cadre des deux premiers modèles que ces croissances sont régies par les modes propres les moins amortis de la matrice Jacobienne et de son adjoint. Néanmoins les croissances transitoires optimales de ces trois études diffèrent. Le passage d'un modèle 2D à 3D permet de représenter les échelles de temps de l'ajustement zonal. Ainsi, l'étude des perturbations initiales optimales dans le modèle planétaire-géostrophique 3D fait apparaître une croissance en temps fini faisant appel à une dynamique géostrophique, absente du modèle 2D. De la même façon, le passage à un modèle aux équations primitives en configuration globale réaliste permet de mieux représenter la circulation océanique et la localisation des masses d'eaux. L'utilisation de ce dernier modèle induit une croissance transitoire optimale liée au gradient zonal de température moyenne. Ce gradient zonal moyen était mal

représenté dans le modèle planétaire-géostrophique 3D et n'était pas du tout représenté dans le modèle 2D latitude-profondeur.

Le dernier résultat, et autre point commun, de ce type d'étude sur la variabilité océanique exogène est l'obtention de borne sur les variations de la circulation océanique. Cette borne a pu être affinée lors de nos études sur des modèles de plus en plus réalistes. Ainsi, pour la dernière étude utilisant la configuration la plus réaliste, des anomalies de salinité de surface comparables aux *Great Salinity Anomalies* engendreraient une modification de 0.75 Sv de l'intensité de la circulation méridienne et de 0.03 PW de l'intensité du transport de chaleur.

Néanmoins toutes ces études mettent en exergue l'impact plus important des perturbations grande échelle. Il convient de discuter la plausibilité de telles perturbations du flux d'eau douce. Ainsi, nous pourrions citer les *Great Salinity Anomalies* comme mécanisme induisant des perturbations initiales. Ces perturbations correspondent à un apport d'eau douce localisé dans la zone polaire. Elles proviennent de la glace de mer et apparaissent tous les 10 yr. Un événement de ce type a pu être mis en évidence pour chacune des décennies 70, 80 et 90. Ces événements locaux sont propices à générer des gradients grandes échelles de salinité et à induire de la variabilité dans l'Atlantique nord (Zhang et Vallis, 2006). Nous avons fixé les modifications de la circulation dû à ce type de perturbations à un maximum de 0.75 Sv (chapitre 5).

Un candidat à la formation de perturbations grande échelle constante est la fonte des glaces. Le réchauffement global induit dans les zones polaires une diminution de la calotte glacière (de l'ordre de 40% de son volume entre 1960 et 2000, Rothrock et al., 1999) et donc une dilution régulière de l'océan limitrophe. Cette dilution n'apparaissant que dans les régions polaires, elle génère un gradient à l'échelle de l'Atlantique nord capable de générer des modifications de la circulation océanique. De la même façon Held et Soden (2006) montrent que le réchauffement climatique globale induit une modification du cycle hydrologique de l'ordre de 4%. Ceci entraînera une modification de la circulation de 0.14 Sv (chapitre 3).

Enfin, bien que le bruit atmosphérique soit principalement associé à l'activité méso-échelle (formation et propagation de cyclone et d'anticyclone), il est aussi composé de modes de plus grande échelle. Ainsi la *North Atlantic Oscillation* correspond à un mode dipolaire centré sur l'Atlantique nord et est capable d'y générer des fluctuations grande échelle du flux d'eau douce Lamb et Pepler (1987) comme de l'accumulation de glace du Groënland (Appenzeller et al., 1998). Toutes ces études mettent en évidence l'existence de fluctuations grande échelle du flux d'eau douce reçu par l'océan. Ce bruit peut être mesuré dans les données de flux d'eau douce océanique est fixe une variabilité de la circulation océanique à un maximum d'écart type de 4 Sv (chapitre 4).

Ainsi, en regard au réchauffement climatique global, il convient de surveiller de façon extrêmement attentive les moindres modifications des zones d'évaporation et de précipitation ainsi que de la quantité de glace de la surface du globe. Au cours de cette thèse nous avons montré que de telles modifications ont un impact significatif sur la circulation océanique et sur le transport de chaleur qu'elle induit, cette surveillance permettrait donc de prévoir

et d'anticiper les éventuels changements climatiques.

Plusieurs perspectives nous semblent intéressantes à envisager dans la continuité de notre travail. Pour l'étude de la variabilité endogène, un travail sur des modèles de dynamiques plus complètes et plus complexes, comme des modèles aux équations planétaires-géostrophiques ou aux équations primitives, pourrait être une avancée dans la compréhension et la validation des oscillations centenaires et millénaires. De la même façon, l'influence d'une configuration plus réaliste, ayant un trait de côte et une topographie représentant plus précisément l'Atlantique, pourrait être évaluée. De plus, nos résultats, lors du passage d'une configuration hémisphérique à bihémisphérique, nous laissent penser qu'un modèle global pourrait fortement modifier la présence et la forme de nos oscillations. Le but sous-jacent à ces nouvelles études serait d'évaluer la question de l'artefact de la modélisation sur les mécanismes physiques permettant de soutenir les oscillations. En effet, l'oscillation millénaire semble très dépendante de l'oscillation centenaire et la présence de bifurcation période-infinie aussi. Il est alors intéressant, voire nécessaire, de comprendre l'évolution et la robustesse des mécanismes physiques proposés dans des configurations plus réalistes, afin d'évaluer leur impact réel sur le climat.

Dans le cadre de l'étude sur la variabilité exogène, où l'utilisation d'une configuration réaliste globale a déjà été menée, il conviendrait de la renforcer par la prise en compte d'un cycle saisonnier et ainsi de nous placer dans le cadre d'une étude non-autonome (absence d'état d'équilibre). Ce type d'étude permettrait d'évaluer les périodes de l'année, et donc indirectement les profondeurs de couche de mélange, les plus propices à l'influence par des perturbations de salinité de surface de la circulation océanique. Cette extension est d'autant plus intéressante, et non pas seulement méthodologique, que nous appliquons notre méthode aux équations primitives dans une configuration globale réaliste : le cycle saisonnier est alors bien représenté. Une autre perspective de notre travail sur la variabilité exogène serait la prise en compte des termes non-linéaires à l'image des études de Mu et al. (2004); Sun et al. (2005); Mu et Zhang (2006). Cette dernière perspective permettrait, en outre, d'évaluer les dissymétries engendrées par une perturbation positive ou négative de salinité de surface sur la circulation océanique. En effet, le signe d'une perturbation peut induire des effets radicalement différents au vue de la stratification, à l'image d'une perturbation de densité dans une zone de convection. De plus, dans le cadre d'une étude non-linéaire, l'effet de l'intensité de la perturbation pourrait être aussi évalué et nous permettrait une compréhension plus réaliste des mécanismes liant la salinité de surface à la circulation océanique. Une dernière perspective serait l'obtention des vecteurs propres d'un modèle linéaire de la circulation océanique générale et de son adjoint. Ce travail permettrait une meilleure analyse des croissances transitoires optimales. De plus, au-delà de l'étude de perturbation optimale, la connaissance de ces vecteurs propres serait une avancée très intéressante dans la compréhension de la dynamique océanique globale.

De manière plus générale, l'étude de la variabilité océanique, qu'elle soit endogène ou exogène, nécessite une meilleure représentation des autres composantes du climat. Ceci est d'autant plus vrai que notre étude s'intéresse principalement à la variabilité induite par des changements de salinité de surface de l'océan. En effet, l'atmosphère et la cryosphère ont

un impact significatif sur les flux d'eau douce ressentis par l'océan (tout comme les rivières mais dans une moindre mesure). Dans le contexte d'une étude climatique, il conviendrait d'utiliser des modèles couplés océan, atmosphère et glace afin de mieux représenter les interactions entre ces sous-systèmes et d'enrichir la dynamique.

Bibliographie

- Alley, R. B., et al., 1999 : Making sense of millennial-scale climate change. *AGU Geophysical Monograph Series*, **vol. 112**, 385–394.
- Appenzeller, C., et al., 1998 : The North Atlantic Oscillation and its imprint on precipitation and ice accumulation in Greenland. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1939–1942.
- Alley, R. B., 2000 : Ice-core evidence of abrupt climate changes. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **97**, 1331–1334.
- Arzel, O., 2004 : *Mécanismes de variabilité climatique interdécennale dans des modèles idéalisés*. Ph.D. thesis, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, 240 pp.
- Arzel, O., T. Huck, et A. Colin de Verdière, 2006 : The different nature of the interdecadal variability of the thermohaline circulation under mixed and flux boundary conditions. *J. Phys. Oceanogr.*, **36**, 1703–1718.
- Belkin, I. S., et al., 1998 : Great Salinity Anomalies in the North Atlantic. *Prog. Oceanogr.*, **41**, 1–68.
- Ben Jelloul, M. et R. X. Huang, 2006 : The abyssal stratification and circulation deduced from the principle of maximal entropy production. *Tellus*, **58A**, 392–403.
- Blanke, B. et P. Delecluse, 1993 : Variability of the tropical Atlantic ocean simulated by a general circulation model with two different mixed-layer physics. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1363–1388.
- Bond, G., et al., 1997 : A pervasive millennial-scale cycle in North Atlantic Holocene and glacial climates. *Science*, **278**, 1257–1266.
- Bugnion, V., C. Hill, et P. H. Stone, 2006b : An adjoint analysis of the meridional overturning circulation in an ocean model. *J. Climate*, **19**, 3732–3750.
- , 2006a : An adjoint analysis of the meridional overturning circulation in a hybrid coupled model. *J. Climate*, **19**, 3751–3767.
- Chen, F. et M. Ghil, 1995 : Interdecadal variability of the thermohaline circulation and high-latitude surface flux. *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2547–2568.

- , 1996 : Interdecadal variability in a hybrid coupled ocean-atmosphere model. *J. Phys. Oceanogr.*, **26**, 1561–1578.
- Colin de Verdière, A. et T. Huck, 1999 : Baroclinic instability : an oceanic wavemaker for interdecadal variability. *J. Phys. Oceanogr.*, **29**, 893–910.
- Colin de Verdière, A., M. Ben Jelloul, et F. Sévellec, 2006 : Bifurcation structure of thermohaline oscillation. *J. Climate*, **19**, 5777–5795.
- Coman, M. A., R. W. Griffith, et G. O. Hughes, 2006 : Sandström’s experiments revisited. *J. Mar. Res.*, **64**, 783–796.
- Curry, R., B. Dickson, et I. Yashayaev, 2003 : A change in freshwater balance of the Atlantic ocean over the past four decades. *Nature*, **426**, 826–829.
- Curry, R. et C. Mauritzen, 2005 : Dilution of the northern North Atlantic ocean in recent decades. *Science*, **308**, 1772–1774.
- Dansgaard, W., et al., 1993 : Evidence for general instability of past climate from a 250-kyr ice-core record. *Nature*, **364**, 218–220.
- Delworth, T. L. et M. E. Mann, 2000 : Observed and simulated multidecadal variability in the northern hemisphere. *Clim. Dyn.*, **16**, 661–676.
- Dewar, W. K. et R. X. Huang, 1995. Fluid flow in loops driven by freshwater and heat fluxes. *J. Fluid Mech.*, **297**, 153–191.
- , 1996. On a forced flow of salty water in a loop. *Phys. Fluids*, **4**, 954–970.
- Dijkstra, H. . et M. J. Molemaker, 1997. Symmetry breaking and overturning oscillations in thermohaline-driven flows. *J. Fluid Mech.*, **4**, 169–198.
- Dijkstra, H. A., 2000 : *Nonlinear Physical Oceanography*. Kluwer Academic Publishers.
- Dijkstra, H. A. et M. Ghil, 2005 : Low-frequency variability of the large-scale ocean circulation : A dynamical systems approach. *Rev. Geophys.*, **43**, RG3002, doi : 10.1029/2002RG000122.
- Farrell, B., 1988 : Optimal excitation of neutral rossby waves. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 163–172.
- Farrell, B. et A. M. Moore, 1992 : An adjoint method for obtaining the most rapidly growing perturbation to oceanic flows. *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 338–349.
- Farrell, B. et P. J. Ioannou, 1993 : Stochastic forcing of perturbation variance in unbounded shear and deformation flows. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 200–211.
- Farrell, B. F. et P. J. Ioannou, 1996a : Generalized stability theory. Part I : autonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 2025–2040.

- , 1996b : Generalized stability theory. Part II : nonautonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2041–2053.
- Frankignoul, C. et K. Hasselmann, 1977 : Stochastic climate models, part II. Application to sea-surface temperature anomalies and thermocline variability. *Tellus*, **29**, 289–305.
- Ganachaud, A. et C. Wunsch, 2000 : Improved estimates of global ocean circulation, heat transport and mixing from hydrographic data. *Nature*, **408**, 453–457.
- Ganopolski, A. et S. Rahmstorf, 2002 : Abrupt climate changes due to stochastic resonance. *Phys. Res. Lett.*, **88**, 038 501.
- Gent, P. R. et J. C. McWilliams, 1990 : Isopycnal mixing in ocean circulation model. *J. Phys. Oceanogr.*, **20**, 150–155.
- Ghil, M., 1994 : Cryothermodynamics : the chaotic dynamics of paleoclimate. *Phys. D*, **77**, 130–159.
- , 2002 : Natural climate variability. In T. E. Munn, M. MacCracken, and J. Perry, editors, Encyclopedia of global environmental science, volume 1. J. Wiley and Sons.
- Gildor, H. et E. Tziperman, 2000 : Sea ice as a glacial cycles' climate switch : Role of the seasonal and orbital forcing. *Paleoceanography*, **15**, 605–615.
- , 2001 : A sea ice climate switch mechanism for the 100-kyr glacial cycle. *J. Geophys. Res.*, **106**, 9117–9133.
- Griffies, S. M. et E. Tziperman, 1995 : A linear thermohaline oscillator driven by stochastic atmospheric forcing. *J. Climate*, **8**, 2440–2453.
- GRIP Members, 1993 : Climate instability during the last interglacial period recorded in the GRIP ice core. *Nature*, **364**, 203–207.
- Held, I. M. et B. J. Soden, 2006 : Robust responses of the hydrological cycle to global warming. *J. Climate*, **19**, 5686–5699.
- Howard, L. N., 1971 : ABC's of convection. Geophysical Fluid Dynamics Summer School. Tech. rep., 71-63, 102-105, WHOI internal report.
- Huang, R. X. et R. W. Schmitt, 1993 : The Goldsbrough-Stommel circulation of the world oceans. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1277–1284.
- Huang, R. X., 1993. Real Feshwater flux as a natural boundary condition for the salinity balance and thermohaline circulation forced by evaporation and precipitation. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 2428–2446.
- Huang, R. X. et W. K. Dewar, 1996. Haline circulation : bifurcation and chaos. *J. Phys. Oceanogr.*, **26**, 2093–2106.

- Huck, T., A. Colin de Verdière, et A. J. Weaver, 1999 : Interdecadal variability of the thermohaline circulation in box-ocean models forced by fixed surface fluxes. *J. Phys. Oceanogr.*, **29**, 865–892.
- Huck, T. et G. K. Vallis, 2001 : Linear stability analysis of three-dimensional thermally-driven ocean circulation : application to interdecadal oscillations. *Tellus*, **53A**, 526–545.
- Huck, T., A. J. Weaver, et A. Colin de Verdière, 1999b. On the influence of the parameterization of lateral boundary layers on the thermohaline circulation in coarse-resolution ocean models. *J. Mar. Res.*, **57**, 387–426.
- Huybers, P. et C. Wunsch, 2004 : A depth derived Pleistocene age models : Uncertainty estimates, sedimentation variability, and nonlinear climate change. *Paleoceanography*, **19**, PA1028.
- Ioannou, P. J., 1995 : Nonnormality increases variance. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1155–1158.
- Jones, P. D. et M. E. Mann, 2004. Climate over past millennia. *Rev. Geophys.*, **42**, 2, RG2002, doi : 10.1029/2003RG000143.
- Josey, S. A. et R. Marsh, 2005 : Surface freshwater flux variability and recent freshening of the North Atlantic in the eastern subpolar gyre. *J. Geophys. Res.*, **110**, C05008.
- Kawase, M., 1987 : Establishment of deep ocean circulation driven by deep-water production. *J. Phys. Oceanogr.*, **17**, 2294–2317.
- Keller, J. B., 1966. Periodic oscillations in a model of thermal convection. *J. Fluid Mech.*, **26**, 599–606.
- Knight, J. R., C. K. Folland, et A. A. Scaife, 2006 : Climate impacts of the Atlantic multidecadal oscillation. *Geophys. Res. Lett.*, **33**, L17706.
- Knight, J. R., et al., 2005 : A signature of persistent natural thermohaline circulation cycles in observed climate. *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L20708.
- Kushnir, Y., 1994 : Interdecadal variations in North Atlantic sea surface temperature and associated atmospheric conditions. *J. Climate*, **7**, 141–157.
- Lamb, P. J. et R. A. Peppler, 1987 : North Atlantic Oscillation : concept and an application. *Bulletin of the American Meteorological Society*, **68**, 1218–1225.
- Latif, M., 1997 : Dynamics of interdecadal variability in coupled ocean-atmosphere models. *J. Climate*, **11**, 602–624.
- Lazar, A., 1997 : *La branche froide de la circulation thermohaline : sensibilité dans un modèle de circulation générale idéalisée*. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 269 pp.

- Levitus, S., 1989 : Interpentadal variability of temperature and salinity at intermediate depths of the North Atlantic ocean, 1970-1974 versus 1955-1959. *J. Geophys. Res.*, **94**, 9679–9685.
- Liesicki, L. E. et M. E. Raymo, 2005 : A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic $\delta^{18}\text{O}$ records. *Paleoceanography*, **20**, PA1003.
- Lohmann, G. et J. Schneider, 1999 : Dynamics and predictability of Stommel's box model. A phase-space perspective with implications for decadal climate variability. *Tellus*, **51A**, 326–336.
- Lorenz, E. N., 1955. Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus*, **VII**, 2, 157–167.
- Maas, L. R. M., 1994. A simple model for the three-dimensional, thermally and wind-driven ocean circulation. *Tellus*, **46A**, 671–680.
- Madec, G. et M. Imbard, 1996 : A global ocean mesh to overcome the North Pole singularity. *Clim. Dyn.*, **12**, 381–388.
- Madec, G., et al., 1997 : OPA version 8.0 Ocean General Circulation Model reference manual. Tech. rep., LODYC, France.
- Malkus, W. V. R., 1972 : Non-periodic convection at high and low Prandtl number. *Mémoires Société Royale des Sciences de Liège*, **6^e Serie, Tome IV**, 125–128.
- Mann, M. E., R. S. Bradley, et M. K. Hughes, 1999 : Northern hemisphere temperature during the past millenium : inferences, uncertainties, and limitations. *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 759–762.
- Marotzke, J., P. Welander, et J. Willebrand, 1988. Instability and multiple steady states in a meridional-plane model of the thermohaline circulation. *Tellus*, **40A**, 162–172.
- Marotzke, J., 1996 : Analysis of thermohaline feedbacks. In : Decadal climate variability. Dynamics and predictability, D. L. T. Anderson and J. Willebrand (eds.). NATO ASI Series, Series I, vol. 44, pp. 333–378.
- Marotzke, J. et J. R. Scott, 1999. Convective mixing and the thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **29**, 2962–2970.
- Mikolajewicz, U. et E. Maier-Reimer, 1990 : Internal secular variability in an ocean general circulation model. *Clim. Dyn.*, **4**, 145–156.
- Mitchell, J. M., 1976 : An overview of climatic variability and its causal mechanisms. *Quaternary Res.*, **6**, 481–493.

- Moore, A. M. et B. F. Farrell, 1993 : Rapid perturbation growth on spatially and temporally varying oceanic flows determined using an adjoint method : application to the Gulf Stream. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1682–1702.
- Moore, A. M., C. L. Perez, et J. Zavala-Garay, 2002 : A non-normal view of the wind-driven ocean circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **32**, 2681–2705.
- Moore, A. M., et al., 2003 : The role of air-sea interaction in controlling the optimal perturbations of low-frequency tropical coupled ocean-atmosphere modes. *J. Climate*, **16**, 951–968.
- Moron, V., R. Vautard, et M. Ghil, 1998 : Trends, interdecadal and interannual oscillations in global sea-surface temperatures. *Clim. Dyn.*, **14**, 545–569.
- Mu, M., L. Sun, et H. A. Dijkstra, 2004 : The sensitivity and stability of the ocean's thermohaline circulation to finite amplitude perturbations. *J. Phys. Oceanogr.*, **45**, 2305–2315.
- Mu, M. et Z. Zhang, 2006 : Conditional Nonlinear Optimal Perturbations of a Two-Dimensional Quasigeostrophic Model. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 1587–1604.
- Munk, W. H., 1950 : On the wind driven ocean circulation. *J. Meteor.*, **7**, 79–93.
- Munk, W. et C. Wunsch, 1998 : Abyssal Recipes II : Energetics of Tidal and Wind Mixing. *Deep-Sea Res. Part I*, **45**, 1977–2010.
- Mysak, L. A., T. F. Stocker, et F. Huang, 1993 : Century-scale variability in a randomly forced, two-dimensional thermohaline ocean circulation model. *Clim. Dyn.*, **8**, 103–106.
- NGRIP Members, 2004 : High-resolution record of northern hemisphere climate extending into the last interglacial. *Nature*, **431**, 147–151.
- Paillard, D. et E. Cortijo, 1999. A simulation of the Atlantic meridional circulation during Heinrich event 4 using reconstructed sea surface temperatures and salinity. *Paleoceanography*, **14**, 716–724.
- Petit, J. R., et al., 1999 : Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica. *Nature*, **399**, 429–436.
- Quon, C. et M. Ghil, 1992 : Multiple equilibria in thermosolutal convection due to salt-flux boundary conditions. *J. Fluid Mech.*, **245**, 449–483.
- , 1995 : Multiple equilibria and stable oscillations in thermosolutal convection at small aspect ratio. *J. Fluid Mech.*, **291**, 33–56.
- Rahmstorf, S., 2002 : Ocean circulation and climate during the past 120,000 years. *Nature*, **419**, 207–214.

- , 2003 : Timing of abrupt climate change : a precise clock. *Geophys. Res. Lett.*, **30**, GL017115.
- Rothrock, D. A., Y. Yu, et G. A. Maykut, 1999 : Thinning of the Arctic sea-ice cover. *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 3469–3472.
- Sévellec, F., T. Huck, et M. Ben Jelloul, 2006 : On the mechanism of centennial thermohaline oscillations. *J. Mar. Res.*, **64**, 355–392.
- Sévellec, F., M. Ben Jelloul, et T. Huck, 2007 : Optimal surface salinity perturbations influencing the thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, in press.
- Simonet, E., M. Ghil, et H. Dijkstra, 2005 : Homoclinic bifurcation in a quasi-geostrophic double-gyre circulation. *J. Mar. Res.*, **63**, 931–956.
- Sirkes, Z. et E. Tziperman, 2001 : Identifying a damped oscillatory thermohaline mode in a general circulation model using an adjoint model. *J. Phys. Oceanogr.*, **31**, 2297–2305.
- Stocker, T. F. et L. A. Mysak, 1992 : Climatic fluctuations on the century time scale : a review of high-resolution proxy data and possible mechanisms. *Clim. Chan.*, **20**, 227–250.
- Stommel, H., 1948 : The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Am. Geophys. Union*, **29**, 202–206.
- , 1958 : The abyssal circulation. *Deep-Sea Res.*, **4**, 80–82.
- , 1961 : Thermohaline convection with stable regimes flow. *Tellus*, **13**, 224–230.
- Stommel, H. et A. B. Arons, 1960a : On the abyssal circulation of the world ocean—I. Stationary planetary flow patterns on a sphere. *Deep-Sea Res.*, **6**, 140–154.
- , 1960b : On the abyssal circulation of the world ocean—II. An idealized model of the circulation pattern and amplitude in oceanic basins. *Deep-Sea Res.*, **6**, 217–233.
- Stone, P. H. et Y. P. Krasovskiy, 1999 : Stability of the interhemispheric thermohaline circulation in a coupled box model. *Dyn. Atmos. Oceans*, **29**, 415–435.
- Strogatz, S. H., 1994 : *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Advanced book program, Perseus book.
- Sun, L., et al., 2005 : Passive mechanism of decadal variation of thermohaline circulation. *J. Geophys. Res.*, **110**, C07025.
- Sutton, R. W. et D. L. R. Hodson, 2003 : Influence of the ocean on North Atlantic climate variability 1671-1999. *J. Climate*, **16**, 3296–3313.
- , 2005 : Atlantic ocean forcing of North American and European summer climate. *Science*, **309**, 115–118.

- Sverdrup, H. U., 1947 : Wind-driven currents in a baroclinic ocean ; with application to the equatorial current of eastern Pacific. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **33**, 318–326.
- Talley, L. D., J. L. Reid, et P. E. Robbins, 2003 : Data-based meridional overturning streamfunctions for the global ocean. *J. Climate*, **16**, 3213–3226.
- Te Raa, L. A. et H. A. Dijkstra, 2002 : Instability of the thermohaline ocean circulation on interdecadal timescales. *J. Phys. Oceanogr.*, **32**, 138–160.
- , 2003. Modes of internal thermohaline variability in a single-hemispheric ocean basin. *J. Mar. Res.*, **61**, 491–516.
- Titz, S., et al., 2002 : On freshwater-dependent bifurcations in box model of the interhemispheric thermohaline circulation. *Tellus*, **54A**, 89–98.
- Tziperman, E., et al., 1994 : Instability of the thermohaline circulation with respect to mixed boundary-conditions : Is it really a problem for realistic models? *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 217–232.
- Tziperman, E. et P. J. Ioannou, 2002 : Transient growth and optimal excitation of thermohaline variability. *J. Phys. Oceanogr.*, **32**, 3427–3435.
- Vautard, R. et M. Ghil, 1989 : Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series. *Phys. D*, **35**, 395–424.
- Weaver, A. J. et E. S. Sarachik, 1991 : The role of mixed boundary conditions in numerical models of ocean’s climate. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1470–1493.
- Weaver, A. J., E. S. Sarachik, et J. Marotzke, 1991 : Freshwater flux forcing of decadal and interdecadal oceanic variability. *Nature*, **353**, 836–838.
- Weaver, A. J., et al., 1993 : Stability and variability of the thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 39–60.
- Weaver, A. T., J. Vialard, et D. L. T. Anderson, 2003 : Three- and four-dimensional variational assimilation with a general circulation model of the tropical Pacific Ocean. Part 1 : formulation, internal diagnostics and consistency checks. *Mon. Wea. Rev.*, **131**, 1360–1378.
- Weijer, W. et H. A. Dijkstra, 2003. Multiple oscillatory modes of the global ocean circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **33**, 2197–2213.
- Welander, P., 1957. Note on the self-sustained oscillations of a simple thermal system. *Tellus*, **IX**, 419–420.
- , 1965. Steady and oscillatory motions of a differentially heated fluid loop. Tech. rep., 65-48, Woods Hole Oceanographic Institution, 34 pp.

- , 1967. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop. *J. Fluid Mech.*, **29**, 17–30.
- , 1986. Thermohaline effects in the ocean circulation and related simple models. In : Large-scale transport processes in oceans and atmosphere, D. L. T. Anderson and J. Willebrand (eds.), pp. 163–200.
- Winton, M., 1993 : Deep decoupling oscillations of the oceanic thermohaline circulation. In : Ice in the climate system, W. R. Peltier, Springer Verlag (eds.). NATO ASI Series, Series I, vol. 12, pp. 417–432.
- , 1995 : Energetics of deep-decoupling oscillations. *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 420–427.
- Winton, M. et E. S. Sarachik, 1993 : Thermohaline oscillations induced by strong steady salinity forcing of ocean general circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1389–1410.
- Wright, D. G. et T. F. Stocker, 1991. A zonally averaged ocean model for thermohaline circulation. Part I : model development and flow dynamics. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1713–1724.
- Wright, D. G., C. B. Vreugdenhil, et T. M. Hughes, 1995. Vorticity dynamics and zonally averaged ocean circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2141–2154.
- Wright, D. G., T. F. Stocker, et D. Mercer, 1998. Closures used in zonally averaged ocean models. *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 791–804.
- Wunsch, C., 2000 : On sharp spectral lines in the climate record and the millennial peak. *Paleoceanography*, **15**, 417–424.
- , 2004 : Quantitative estimate of the Milankovitch-forced contribution to observed Quaternary climate change. *Quaternary Science Reviews*, **23**, 1001–1012.
- , 2005 : Thermohaline loops, Stommel box models, and Sandström’s theorem. *Tellus*, **57A**, 84–99.
- Wunsch, C. et R. Ferrari, 2004 : Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, **36**, 281–314.
- Zanna, L. et E. Tziperman, 2005 : Nonnormal amplification of the thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **35**, 1593–1605.
- Zhang, S., C. A. Lin, et G. R. J., 1992. A thermocline model for ocean-climate studies. *J. Mar. Res.*, **50**, 99–124.
- Zhang, R. et G. K. Vallis, 2006 : Impact of great salinity anomalies on the low-frequency variability of the North Atlantic climate. *J. Climate*, **19**, 470–482.

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Titre :

Variabilité basse fréquence endogène et exogène de la circulation thermohaline

Auteur :

Florian Sévellec

Résumé : Une des conséquences du réchauffement climatique est la modification du cycle hydrologique et par conséquent du flux d'eau douce reçu par l'océan qui est l'un de ces forçages. La circulation océanique, et plus précisément la circulation thermohaline, est particulièrement susceptible de produire de la variabilité basse fréquence. Nous allons nous intéresser à l'impact du flux d'eau douce sur la circulation thermohaline et principalement sur sa variabilité décennale à millénaire.

Dans l'océan, comme dans tout système dynamique, deux paradigmes coexistent pour expliquer la variabilité observée : elle peut être endogène ou exogène.

Plusieurs résultats notables apparaissent. Au cours de l'étude de la variabilité endogène dans un modèle 2D latitude-profondeur, les mécanismes de croissance et d'oscillation d'un mode centenaire sont analysés et ses caractéristiques décrites. Ce mode, correspondant à l'advection d'une anomalie de densité dominée par la salinité le long de la circulation, se nourrit par la rétroaction de la salinité sur l'advection dans les zones de forçage par le flux d'eau douce. De plus, un cycle d'oscillation millénaire apparaissant à travers une bifurcation période-infinie est caractérisé. La bifurcation est due à la présence de modes de plus hautes fréquences au cours du cycle millénaire. Ainsi, nous montrons que l'oscillation centenaire est un précurseur de l'oscillation millénaire.

Au cours de l'étude de la variabilité exogène, les perturbations optimales de la circulation océanique par la salinité de surface sont obtenues dans trois modèles de la circulation thermohaline : un modèle latitude-profondeur, un modèle planétaire-géostrophique et un modèle aux équations primitives en configuration globale réaliste. Ces trois modèles induisent des échelles de temps des croissances en temps fini différentes (respectivement 67 yr, 24 yr et 10.5 yr). Les mécanismes physiques entraînant ces croissances transitoires différent et ont été analysés. Pour les deux premiers modèles nous avons pu vérifier que c'est le mode linéaire le moins amorti qui contrôle la croissance transitoire. De plus, les perturbations stochastiques optimales font apparaître un pic aux fréquences de ces modes les moins amortis (respectivement 150 yr et 35 yr). En outre, par cette étude des perturbations optimales, nous avons obtenu une borne de modification de la circulation océanique à 0.75 Sv et à 0.03 PW.

Mots clés : Circulation thermohaline, variabilité basse fréquence, influence du flux d'eau douce, perturbation optimale.

Title :

Endogenous and exogenous low frequency variability of the thermohaline circulation

Author :

Florian Sévellec

Abstract : One of the consequences of the global warming is the modification of the hydrological cycle and then of the freshwater flux get by the ocean which one of its forcing. The ocean circulation, and more accurately the thermohaline circulation, is able to produce some low frequency variability. We are going to study the impact of the freshwater flux on the thermohaline circulation and mainly on the decadal to millennial variability.

In the ocean, as in all dynamical systems, two paradigms coexist for the explanation of the observed variability : it can be endogenous or exogenous.

Some outstanding results appear. During the study of endogenous variability in a 2D latitude-depth model, the growth mechanism and the oscillation one of a centennial mode are analyzed and their characteristics are described. This mode, corresponding to a salinity dominated density anomaly advected around the circulation, is fed by the positive salinity feedback on the advection in the freshwater forcing zone. A millennial oscillation cycle which appears through an infinite-period bifurcation is characterized. The bifurcation is due to higher frequency mode presence during the millennial cycle. Thus, we point out that the centennial oscillation is a precursor of millennial oscillation.

During the study of the exogenous variability, the optimal perturbations of the sea surface salinity influencing the ocean circulation are performed in three models of the thermohaline circulation : a latitude-depth model, a planetary-geostrophic model and a primitive equation in global realistic configuration. these three models induce finite time growths on different time scales (respectively 67 yr, 24 yr and 10.5 yr). The physical mechanisms inducing these transient growths have been analysed. For the two first models, we have been able to verify that it is the less damped eigenmode which control the transient growth. The optimal stochastic perturbations reveal a peak at the frequencies of these less damped (respectively 150 yr and 35 yr) eigenmodes. Moreover, by this study of the optimal perturbations, we have fixed modification bound of the ocean circulation at 0.75 Sv and at 0.03 PW.

Keywords : Thermohaline circulation, low frequency variability, freshwater flux impact, optimal perturbation.