

Rapport de stage de DEA Océanographie Météorologie et
Environnement

Stabilité et variabilité de la circulation thermohaline dans des modèles en boîtes

Florian Sévellec

stage réalisé au Laboratoire de Physique des Océans
(UMR 6523 CNRS-IFREMER-UBO)

sous la direction de
Thierry Huck
et Mahdi Ben Jelloul

Février-Juin 2003

Je remercie particulièrement Thierry HUCK et Mahdi BEN JELLOUL pour le temps qu'ils m'ont consacré. Leurs nombreux conseils et explications ont été très précieux. Enfin, je n'oublierais pas le personnel du Laboratoire de Physique des Océans pour leur accueil et pour leur aide.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Formulation upstream	5
2.1	Analyse	5
2.1.1	Adimensionnalisation	6
2.1.2	États d'équilibre	7
2.1.3	Mesure de la dissipation	8
2.1.4	Résultats	9
2.2	Étude de stabilité	9
2.3	Mécanismes	12
2.3.1	Salinité en traceur passif	13
2.3.2	Salinité en traceur actif	16
2.3.3	Température	18
2.4	Influence du forçage en eau douce	19
2.4.1	Système complet	19
2.4.2	Sous-système	20
2.5	Intégration non-linéaire	21
3	Formulation centrée	23
3.1	Analyse	23
3.1.1	Adimensionnalisation	23
3.1.2	États d'équilibre	24
3.1.3	Mesure de la dissipation	25
3.1.4	Résultats	25
3.2	Étude de stabilité	26
3.3	Influence du forçage en eau douce	28
3.4	Intégration non-linéaire	29
4	Conclusion	33

1 Introduction

Le climat possède de la variabilité de différente échelle, des variations de très longues périodes, induites par les mouvements planétaires (oscillation de l'excentricité de la Terre par exemple), jusqu'à des variations interannuelles comme El Niño, ou l'oscillation nord atlantique (NAO). Nous allons dans notre étude nous focaliser sur la variabilité climatique interdécennale. La circulation thermohaline possède une échelle de temps qui lui permet d'être candidat à l'explication de ces variations (Marotzke, 1996).

Les différences latitudinales d'insolation et d'échanges d'eau douce entre l'atmosphère et l'océan engendrent des gradients géographiques de densité. Ces gradients de densité entraînent une circulation océanique de grande échelle, la circulation thermohaline.

Nous nous proposons d'étudier ce type de circulation dans des modèles en boîtes, où la circulation est induite par des gradients de densité. Stommel (1961) a clairement illustré ce type de circulation dans un modèle à deux boîtes en y incluant les mécanismes physiques nécessaires pour illustrer les équilibres multiples de cette circulation. Nous utiliserons un modèle quelque peu différent, pour faire apparaître des oscillations. En effet, la symétrie des variables de température et de salinité du modèle de Stommel (1961) ne permet pas de faire apparaître des oscillations (Ruddick et Zhang, 1996). D'autres modèles en boîtes, basés sur le même type de circulation, ont montré l'apparition d'oscillations amorties comme pour le modèle à quatre boîtes de Tziperman et al. (1994). Ce genre de modèle peut être forcé de façon stochastique, afin d'excitation de ces modes (Cessi, 1994; Griffies et Tziperman, 1995), ce qui a été vérifié dans un modèle de circulation générale (Sirkes et Tziperman, 2001). De plus, l'existence de bifurcation de Hopf (Tziperman et al., 1994) nous permet d'espérer des oscillations perpétuelles. Afin de produire des oscillations, on se propose de disymétriser les variables du modèle de circulation de Stommel (1961) en utilisant deux forçage de caractères différents pour la température et la salinité et une troisième boîte, qui permet de générer des oscillations (Tziperman et Ioannou, 2002).

Dans la suite du travail, nous allons étudier deux formulations différentes de la circulation dans un modèle à trois boîtes afin de retrouver des oscillations et de tester leur robustesse. Ce travail permet de caractériser un oscillateur minimum, en effet, Stommel (1961) avec un modèle à deux boîtes n'oscille pas (Ruddick et Zhang, 1996) et Tziperman et al. (1994) avec un modèle à quatre boîtes oscille, nous travaillerons donc avec un modèle à trois boîtes. Ces deux formulations minimales seront construites dans le but de déterminer les mécanismes induisant ces oscillations et les régimes de paramètres leur permettant d'exister.

Par une approche dynamique de notre système, nous évaluerons les différents points fixes, pour les deux formulations d'évolution du système (§ 2.1 et § 3.1). Nous analyserons leur capacité à osciller, par une étude en perturbations linéarisées (§ 2.2 et § 3.2). Puis nous caractériserons l'influence des différents paramètres de forçage de la circulation thermohaline (§ 2.4 et § 3.3), après avoir identifié les sous-systèmes minimaux oscillants (§ 2.3). Pour chacune des formulations nous validerons les résultats par des intégrations non-linéaires de nos modèles (§ 2.5 et § 3.4).

2 Formulation upstream

2.1 Analyse

Nous nous proposons d'étudier les oscillations de la circulation thermohaline dans un modèle simplifié. Nous prendrons, ici, un modèle à trois boîtes actives que nous formulerons par un schéma advectif dit upstream. Ce type de modélisation se caractérise, dans les équations, par la nécessité d'avoir une advection positive, soit une circulation d'origine thermique, forcée prioritairement par le gradient de température entre les boîtes. En effet, la circulation ne peut se faire dans le sens inverse (toujours de l'équateur au pôle en surface et le contraire en profondeur), sous peine de ne plus être en accord avec les équations. Les trois boîtes seront définies par leur profondeur, leur largeur, leur salinité et leur température. Ainsi la première boîte, boîte tropicale, correspond à la thermocline tropicale (H_1, L_1, T_1, S_1), la deuxième correspondant à une boîte polaire (H_2, L_2, T_2, S_2), et la dernière correspondant à une boîte tropicale abyssale (H_3, L_3, T_3, S_3). Seul les deux premières boîtes sont affectées par le forçage, puisque ce dernier est purement atmosphérique et que seul la boîte abyssale n'est jamais en contact avec la surface. Ici, le forçage se présente sous deux formes, pour la salinité celui-ci correspond à un système d'évaporation-précipitation (FW , qui conserve la masse de sel dans le système et pour la température le forçage est pris sous la forme d'un rappel (γ) à une température (T_i^*) à la surface (seulement pour les boîtes 1 et 2). L'équilibre des forces se fait entre le gradient de pression et le frottement. On écrira le transport de masse entre les boîtes comme une circulation induite par le gradient entre le pôle et l'équateur de la densité intégrée verticalement :

$$U = U_0 \{ \rho_2 - [\delta \rho_1 + (1 - \delta) \rho_3] \} \quad (1)$$

où la densité est $\rho_i = \rho_0 (1 - \alpha T_i + \beta S_i)$, avec $i = 1, 2, 3$; β le paramètre de contraction halin et α celui d'expansion thermique. U_0 étant ici le paramètre de proportionnalité entre la différence de densité et de transport de masse U , et δ un rapport d'aspect défini comme $\delta = H_1/H_2$.

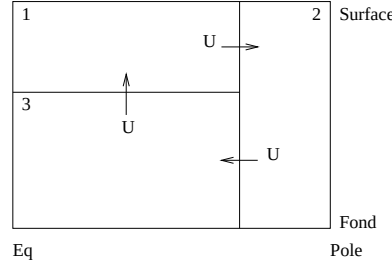


FIG. 1 – Modèle de la circulation thermohaline à trois boîtes.

Les équations du modèle se présentent alors sous la forme :

$$U = U_0 [\alpha \delta T_1 + \alpha T_2 + \alpha (1 - \delta) T_3 - \beta \delta S_1 + \beta S_2 - \beta (1 - \delta) S_3] \quad (2a)$$

$$\partial_t T_1 = \frac{U}{V_1} (T_3 - T_1) + \gamma (T_1^* - T_1) \quad (2b)$$

$$\partial_t T_2 = \frac{U}{V_2} (T_1 - T_2) + \gamma (T_2^* - T_2) \quad (2c)$$

$$\partial_t T_3 = \frac{U}{V_3} (T_2 - T_3) \quad (2d)$$

$$\partial_t S_1 = \frac{U}{V_1} (S_3 - S_1) + \frac{FW}{V_1} \quad (2e)$$

$$\partial_t S_2 = \frac{U}{V_2} (S_1 - S_2) - \frac{FW}{V_2} \quad (2f)$$

$$\partial_t S_3 = \frac{U}{V_3} (S_2 - S_3) \quad (2g)$$

Avec la condition initiale sur la salinité :

les $S_i \equiv S_0$, on aura alors toujours :

$$\Sigma_{i=1} * 3V_i S_0 = \Sigma_{i=1} * 3V_i S_i \text{ avec } i = 1, 2, 3$$

2.1.1 Adimensionnalisation

On passe par l'adimensionnalisation que l'on définit comme :

$$x_i = T_i/T_1^*; y_i = S_i/S_0 \text{ avec } i = 1, 2, 3,$$

$$\tau = t(U_0\beta S_0)/V_1;$$

et on réécrit les volumes avec $H_1/H_2 = \delta$ et $L_2/L_1 = L_2/L_3 = r$, soit :

$$V_2 = V_1 r / \delta$$

$$V_3 = V_1 (1 - \delta) / \delta$$

Nous pouvons en outre remarquer la baisse du nombre de variables entre la formulation dimensionnée et celle adimensionnée. Comme le prévoit le théorème π de Buckingham, le nombre de paramètres indépendants adimensionnés correspond au nombre de variables réduit du nombre d'unités fondamentales du système. On passe donc de 17 variables à 12 paramètres indépendants adimensionnés, puisque l'on a 5 unités fondamentales dans notre système d'équation : les 17 variables du système d'équation $V_i, T_i, S_i, U_0, \alpha, \beta, \gamma, T_{1,2}^*, FW$ et S_0 , sachant que $i = 1, 2, 3$; les 5 unités fondamentales étant : m, K, psu, kg, s.

Les équations se transforment alors en :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & \left\{ \frac{\alpha T_1^*}{\beta S_0} [\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta) x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta) y_3 \right\} (x_3 - x_1) \\ & + \frac{\gamma V_1}{U_0 \beta S_0} (1 - x_1) \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{\delta}{r} \left\{ \frac{\alpha T_1^*}{\beta S_0} [\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta) x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta) y_3 \right\} (x_1 - x_2) \\ & + \frac{\gamma V_1}{U_0 \beta S_0} (x^* - x_2) \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\delta}{1 - \delta} \left\{ \frac{\alpha T_1^*}{\beta S_0} [\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta) x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta) y_3 \right\} (x_2 - x_3) \quad (3c)$$

$$\dot{y}_1 = \left\{ \frac{\alpha T_1^*}{\beta S_0} [\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta) x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta) y_3 \right\} (y_3 - y_1) + f \quad (3d)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\delta}{r} \left\{ \frac{\alpha T_1^*}{\beta S_0} [\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta) x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta) y_3 \right\} (y_1 - y_2) - \frac{\delta}{r} f \quad (3e)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{\delta}{1 - \delta} \left\{ \frac{\alpha T_1^*}{\beta S_0} [\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta) x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta) y_3 \right\} (y_2 - y_3) \quad (3f)$$

avec $\dot{x}_i = \partial_\tau x_i$ et $\dot{y}_i = \partial_\tau y_i$ ($i = 1, 2, 3$). On va poser $a = \alpha T_1^* / \beta S_0$; $b = \gamma V_1 / U_0 \beta S_0$; $x^* = T_2^* / T_1^*$; $\epsilon = \delta / r$ et $f = FW / (U_0 \beta S_0^2)$, dans la suite. On obtient 12 paramètres indépendants adimensionnés : $x_i, y_i, \delta, \epsilon, a, b, x^*$ et f (avec toujours $i = 1, 2, 3$).

Et on trouve alors les valeurs caractéristiques, équivalentes aux expérience de Tziperman et Ioannou (2002) :

$$\delta \sim 0.20; \epsilon \sim 0.50; a \sim 1.80; b \sim 0.70; x^* \sim 0.90; f \sim 5.80 \times 10^{-4}$$

Tous ces nombres sont du même ordre de grandeur, l'adimensionalisation ne permet pas, ici, de reconnaître de paramètre négligeable devant les autres. Ce calcul ne nous permet pas de réduire le système d'équation. Si ce n'est le paramètre de flux d'eau douce f , que nous garderons afin de conserver la possibilité de changer le gradient de sel entre les boîtes.

2.1.2 États d'équilibre

On définit l'état d'équilibre comme : $\dot{x}_i = 0$ et $\dot{y}_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Mais l'advection doit être différente de zéro (la formulation du schéma est de type upstream, ce qui implique $U > 0$), alors les équations (3a–3f) deviennent :

$$\{a[\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta)x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta)y_3\}(x_3 - x_1) + b(1 - x_1) = 0 \quad (4a)$$

$$\epsilon\{a[\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta)x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta)y_3\}(x_1 - x_2) + b(x^* - x_2) = 0 \quad (4b)$$

$$x_3 = x_2 \quad (4c)$$

$$\{a[\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta)x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta)y_3\}(y_3 - y_1) + f = 0 \quad (4d)$$

$$\{a[\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta)x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta)y_3\}(y_1 - y_2) - f = 0 \quad (4e)$$

$$y_3 = y_2 \quad (4f)$$

On déduit les quatres équations :

$$\delta[a(x_1 - x_2) - y_1 + y_2](x_2 - x_1) + b(1 - x_1) = 0 \quad (5a)$$

$$\delta\epsilon[a(x_1 - x_2) - y_1 + y_2](x_1 - x_2) + b(x^* - x_2) = 0 \quad (5b)$$

$$\delta[a(x_1 - x_2) - y_1 + y_2](y_2 - y_1) + f = 0 \quad (5c)$$

$$\delta[a(x_1 - x_2) - y_1 + y_2](y_1 - y_2) - f = 0 \quad (5d)$$

On peut alors remarquer que les équations (5c) et (5d) sont les mêmes. On se propose alors de réinjecter la forme de u dans les équations :

$$u = \delta[a(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1)] \quad (6a)$$

$$u(x_2 - x_1) + b(1 - x_1) = 0 \quad (6b)$$

$$u(x_1 - x_2) + \frac{b}{\epsilon}(x^* - x_2) = 0 \quad (6c)$$

$$u(y_2 - y_1) + f = 0 \quad (6d)$$

Nous allons procéder, à l'écriture d'une équation du troisième ordre pour l'advection u , en évaluant $-\delta a*(6b) + \delta*(6d)$ et en y réinjectant (6a) :

$$x_1 = -\frac{u^2}{\delta ab} - \frac{f}{ab} + 1 \quad (7a)$$

Et en évaluant $\delta a*(6c) + \delta*(6d)$ et en y réinjectant (6a) :

$$x_2 = \frac{\epsilon u^2}{\delta ab} + \frac{\epsilon f}{ab} + x^* \quad (7b)$$

L'équation (6d) seule donnant :

$$y_2 - y_1 = -\frac{f}{u} \quad (8)$$

Ces trois dernières expressions étant réinjectées dans la formulation de u (6a) on obtient l'équation cubique :

$$u^3 + \frac{b}{1 + \epsilon}u^2 + \left[\delta f - \frac{\delta ab}{1 + \epsilon}(1 - x^*)\right]u + \frac{\delta bf}{1 + \epsilon} = 0 \quad (9)$$

dont le résultat analytique est donné en annexe.

Afin de mieux connaître le système à l'équilibre on se propose d'exprimer les variables de salinité (y_1 et y_2) en fonction de l'advection (u). Grâce à l'équation de conservation de la salinité ($(V_1 + V_2 + V_3) S_0 = V_1 S_1 + V_2 S_2 + V_3 S_3$) une fois adimensionnée (ici $y_2 = y_3$) :

$$\epsilon (1 - \delta) y_1 + (1 + \epsilon \delta - \delta) y_2 = 1 + \epsilon - \delta \quad (10)$$

et en utilisant (8) on trouve les deux expressions :

$$y_1 = 1 + \frac{f}{u} \frac{1 + \epsilon \delta - \delta}{1 + \epsilon - \delta} \quad (11a)$$

$$y_2 = 1 - \frac{f}{u} \frac{\epsilon (1 + \delta)}{1 + \epsilon - \delta} \quad (11b)$$

Ainsi, la résolution, par la formule de Cardan, de l'équation cubique (9) sur l'advection (sachant que $u > 0$, schéma upstream) permet de définir parfaitement les points fixes du système par les égalités (7a-7b) et (11a-11b).

2.1.3 Mesure de la dissipation

Afin de mieux évaluer le système on se propose de mesurer sa dissipation (ou sa conservativité), pour cela nous allons appliquer le Théorème de Liouville par le calcul de la divergence du système dynamique :

$$divSD \equiv \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial y_3} \quad (12)$$

Soit

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = a\delta (x_3 - x_1) - u - b \quad (13a)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -a\epsilon (x_1 - x_2) - \epsilon u - b \quad (13b)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = a\delta (x_2 - x_3) - \frac{\delta}{1 - \delta} u \quad (13c)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} = -\delta (y_3 - y_1) - u \quad (13d)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} = \epsilon (y_1 - y_2) - \epsilon u \quad (13e)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_3}{\partial y_3} = -\delta (y_2 - y_3) - \frac{\delta}{1 - \delta} u \quad (13f)$$

$$divSD = (\delta + \epsilon) (y_1 - ax_1) - (\delta + \epsilon) (y_2 - ax_2) - 2 \left(\frac{\delta}{1 - \delta} + \epsilon + 1 \right) u - 2b \quad (14)$$

avec $u = a [\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta) x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta) y_3$.

On voit ici que la mesure de la dissipation ne peut être déduite directement de son expression analytique. Il nous faut obligatoirement connaître les différentes valeurs prises par la température et la salinité pour pouvoir interpréter la dissipation du système dynamique (bien que l'on sache par les calculs précédents qu'au point fixe, $x_2 = x_3$ et $y_2 = y_3$).

U (Sv)	21.81	6.03
T_1 ($^{\circ}\text{C}$)	21.40	21.83
T_2 ($^{\circ}\text{C}$)	0.16	-0.05
T_3 ($^{\circ}\text{C}$)	0.16	-0.05
S_1 (psu)	35.70	37.55
S_2 (psu)	34.53	33.30
S_3 (psu)	34.53	33.30
$divSD$ (an^{-1})	-2.67	-2.48

TAB. 1 – Résultats numériques aux différents points fixes permis par le modèle ($U > 0$).

2.1.4 Résultats

Les calculs effectués, pour connaître les différents points fixes, dans le § 2.1.2 ainsi que ceux du § 2.1.3 pour la divergence du système dynamique, sont ici calculés de façon numérique, notamment la résolution de l'équation cubique (9). Ces résultats sont exprimés dans Tab. 1, pour la mesure de la dissipation du système dynamique on s'est placé au point fixe correspondant.

Ces résultats ont été déterminé avec des valeurs de paramètres suivants :

$$V_1 = 2.0 \times 10^{16} \text{ m}^3; V_2 = 4.0 \times 10^{16} \text{ m}^3; V_3 = 8.0 \times 10^{16} \text{ m}^3; S_0 = 35.0 \text{ psu};$$

$$U_0 = 4.0 \times 10^7 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} (\text{kg m}^{-3})^{-1}; \alpha = 0.1668 \text{ kg m}^{-3} \text{ K}^{-1}; \beta = 0.781 \text{ kg m}^{-3} \text{ psu}^{-1};$$

$$\gamma = 3.858 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}; T_1^* = 295.15 \text{ K}; T_2^* = 273.15 \text{ K}; FW = 2.22 \times 10^7 \text{ psu m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Le premier résultat, directement interprétable, est la forte dissipation du système. En effet, les résultats nous suggèrent que le schéma n'a besoin que d'environ cinq mois pour dissiper une anomalie. Il faut donc savoir qu'un tel système (basé sur un schéma upstream) possède une grande capacité à écraser toute divergence interne, ceci ne voulant par pour autant dire qu'il est stable. En effet, $divSD$ correspond à la trace des valeurs propres de la matrice jacobienne mais l'une des valeurs propres peut être positive bien que $divSD < 0$.

Nous pouvons aussi voir la différence de structure entre les deux points fixes. La première circulation est la plus intense alors que la deuxième qui se révèle comme ayant un fort gradient halin est beaucoup plus faible. Ceci se comprend par le fait que la circulation thermohaline est forcée par les différences de température entre équateur et pôle et inhibé par ces mêmes différences en salinité. Un fort gradient de sel ralentit la circulation, alors qu'un fort gradient de température la renforce.

2.2 Étude de stabilité

Connaissant les états d'équilibres du modèle on se propose de faire une étude aux perturbations linéarisées autour de ces points. Dans cette partie nous allons écrire les variables comme un état moyen plus une perturbation, soit : $x_i = X_i + x'_i$ et $y_i = Y_i + y'_i$ ($i = 1, 2, 3$), tel que $x'_i \ll X_i$ et $y'_i \ll Y_i$. Les équations une fois linéarisées sont de la forme (on a montré que $X_2 = X_3$ et $Y_2 = Y_3$) :

$$\dot{x}'_1 = u' (X_3 - X_1) + U (x'_3 - x'_1) - bx'_1 \quad (15a)$$

$$\dot{x}'_2 = \epsilon [u' (X_1 - X_2) + U (x'_1 - x'_2)] - bx'_2 \quad (15b)$$

$$\dot{x}'_3 = \frac{\delta}{1 - \delta} U (x'_2 - x'_3) \quad (15c)$$

$$\dot{y}'_1 = u' (Y_3 - Y_1) + U (y'_3 - y'_1) \quad (15d)$$

$$\dot{y}'_2 = \epsilon [u' (Y_1 - Y_2) + U (y'_1 - y'_2)] \quad (15e)$$

$$\dot{y}'_3 = \frac{\delta}{1 - \delta} U (y'_2 - y'_3) \quad (15f)$$

avec : $u' = a[\delta x'_1 - x'_2 + (1 - \delta) x'_3] - \delta y'_1 + y'_2 - (1 - \delta) y'_3$

et $U = a\delta (X_1 - X_2) - \delta (Y_1 - Y_2)$

En écrivant sous la forme matricielle on arrive à :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \\ \dot{y}'_1 \\ \dot{y}'_2 \\ \dot{y}'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

où $A =$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a\delta(X_2 - X_1) - U - b & -a(X_2 - X_1) & a(1 - \delta)(X_2 - X_1) + U & -\delta(X_2 - X_1) & (X_2 - X_1) & -(1 - \delta)(X_2 - X_1) \\ a\epsilon\delta(X_1 - X_2) + \epsilon U & -a\epsilon(X_1 - X_2) - \epsilon U - b & a\epsilon(1 - \delta)(X_1 - X_2) & -\epsilon\delta(X_1 - X_2) & \epsilon(X_1 - X_2) & -\epsilon(1 - \delta)(X_1 - X_2) \\ 0 & \delta U / (1 - \delta) & -\delta U / (1 - \delta) & 0 & 0 & 0 \\ \hline a\delta(Y_2 - Y_1) & -a(Y_2 - Y_1) & a(1 - \delta)(Y_2 - Y_1) & -\delta(Y_2 - Y_1) - U & (Y_2 - Y_1) & -(1 - \delta)(Y_2 - Y_1) + U \\ \epsilon a\delta(Y_1 - Y_2) & -\epsilon a(Y_1 - Y_2) & \epsilon a(1 - \delta)(Y_1 - Y_2) & -\epsilon\delta(Y_1 - Y_2) + \epsilon U & \epsilon\delta(Y_1 - Y_2) - \epsilon U & -\epsilon(1 - \delta)(Y_1 - Y_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta U / (1 - \delta) & -\delta U / (1 - \delta) \end{array} \right) \quad (17)$$

nous exprimerons par facilité la matrice comme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \quad (18)$$

Nous réécrivons ce résultat sous la forme $\partial_t \mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{P}$, où $\mathbf{P} \equiv [x'_1, x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3]$. On se propose maintenant d'extraire les modes propres associés à $\mathbf{A}$, ce résultat se trouve par diagonalisation de la matrice Tab. 2. Ce calcul permet entre autre de connaître la base propre du système mais aussi l'amplitude des valeurs propres qui y sont associées (ordre de grandeur de la (dé)croissance ou période des modes : $\partial_t \mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}$).

λ^{-1} (an)	-0.71	-0.82	-129.21	-17.06±35.44i	∞
T'_1 (°C)	-0.8775	0.9519	0.1019	0.3015±0.2189i	0.0000
T'_2 (°C)	0.4796	0.3063	-0.0632	-0.1491∓0.1072i	0.0000
T'_3 (°C)	-0.0028	-0.0021	-0.9555	-0.0319±0.0578i	0.0000
S'_1 (psu)	-0.0057	-0.0012	0.2618	0.8248	0.5774
S'_2 (psu)	0.0029	0.0006	-0.0042	-0.2804∓0.2186i	0.5774
S'_3 (psu)	-0.0000	-0.0000	-0.0633	-0.0660±0.1093i	0.5774
u' (Sv)	1.677	3.611	-5.462	3.212∓4.208i	-36.073

TAB. 2 – Temps relatif de (dé)croissance ou période des modes et structure des modes autour de l'état d'équilibre correspondant à un flux inter-boîte de $U = 21.81$ Sv. Ici, tous les modes sont amortis. NB : $\lambda^{-1} = \lambda_r / |\lambda| - i\lambda_i / |\lambda|$

λ^{-1} (an)	-0.73	-0.82	+8.03	-977.06±5947i	∞
T'_1 (°C)	0.8917	-0.9772	-0.3965	0.0170±0.0005i	0.0000
T'_2 (°C)	-0.4522	-0.2123	0.1979	-0.0086∓0.0001i	0.0000
T'_3 (°C)	0.0003	0.0002	0.0017	-0.0626±0.1113i	0.0000
S'_1 (psu)	0.0187	0.0006	-0.8044	0.9628	0.5774
S'_2 (psu)	-0.0093	-0.0003	0.3956	-0.0081∓0.0137i	0.5774
S'_3 (psu)	0.0000	0.0000	0.0033	-0.2367±0.0069i	0.5774
u' (Sv)	-1.382	-3.041	-5.485	-2.064∓0.825i	-36.073

TAB. 3 – Temps relatif de (dé)croissance ou période des modes et structure des modes autour de l'état d'équilibre correspondant à un flux inter-boîte de $U = 6.03$ Sv. On obtient un mode croissant, ce qui suggère que l'état d'équilibre est instable.

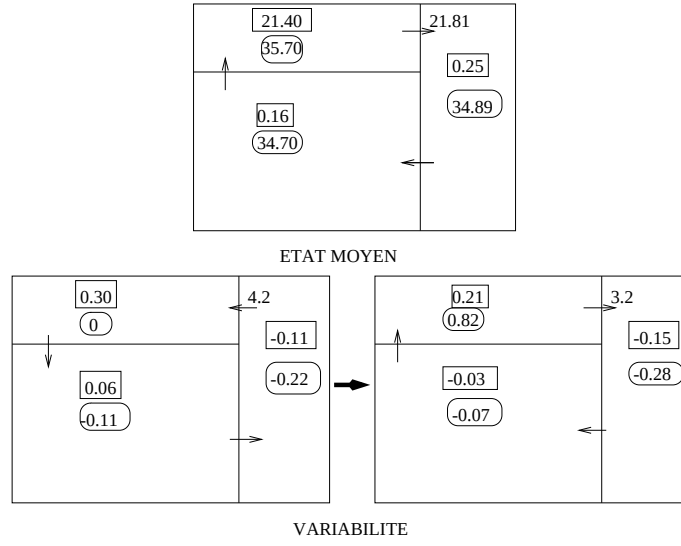


FIG. 2 – Illustration de la structure des variations associé au mode 4. L'état moyen à gauche et les deux phases de variabilité à droite. Les termes d'advection étant sur les flèches, de salinité entouré, les termes encadrés étant la température.

Ces modes peuvent être représentés Fig. 2 et aussi reconstruit. En effet, la structure des résultats du type $\mathbf{A}\mathbf{P} = \lambda\mathbf{P}$ peut s'écrire, sous forme complexe comme $\mathbf{A}(V_r + iV_i) = (\lambda_r + i\lambda_i)(V_r + iV_i)$. On peut alors redéfinir des fonctions variables dans le temps ($\mathbf{A} \equiv \partial_t$) comme des équations d'ondes :

$$\varphi(t) = \Re \left[(V_r + iV_i) e^{(\lambda_r + i\lambda_i)t} \right] \quad (19)$$

On arrive alors à :

$$\varphi(t) = e^{\lambda_r t} [V_r \cos(\lambda_i t) - V_i \sin(\lambda_i t)] \quad (20)$$

Nous pouvons alors retracer les courbes de variations de température et de salinité autour d'un état moyen (Fig. 3 réévaluation effectuée pour le mode 4). Pour une plus simple lisibilité, on se propose de représenter φ sans sa partie exponentielle, qui atténue très rapidement les oscillations (même ordre de grandeur que la période). Nous pouvons remarquer deux résultats importants :

- Le point fixe correspondant à une circulation de $U = 5.65$ Sv est instable. En effet, ce dernier possède, d'après l'analyse de stabilité, une valeurs propres de partie réelle positive ($\lambda = +8.71$ le troisième mode du tableau en gras). Ceci peut être interprété comme la croissance de perturbations autour de ce point fixe, il est donc instable. On peut en outre, vérifier que si l'on intègre numériquement les équations globales, avec comme condition initiale les valeurs en salinité et en température de ce point fixe, on arrive à une divergence de cet état d'équilibre (malgré la forte dissipation induite par le schéma upstream) vers un autre état qui ne peut, dans notre cas, être résolue. En effet, cette bifurcation nous amène à la baisse de la circulation moyenne (U diminue) jusqu'à devenir négatif. Or, notre modèle, basé sur un schéma upstream, ne peut résoudre ce type de circulation. Ce résultat pouvait être attendue, le fort gradient halin de ce point fixe risque d'inverser la circulation.
- Nous pouvons aussi voir l'existence d'oscillations (quatrième colonne des deux tableaux). Bien que ces oscillations soient fortement amorties, $|\lambda_r| > |\lambda_i|$, ce qui correspond au fait que le temps de demi-décroissance ($1/\lambda_r$) du mode est du même ordre ou plus court que sa période ($1/2\pi\lambda_i$).

Nous nous proposons dans la suite de réduire le système d'équations afin de mieux interpréter les mécanismes physiques qui provoquent ces oscillations.

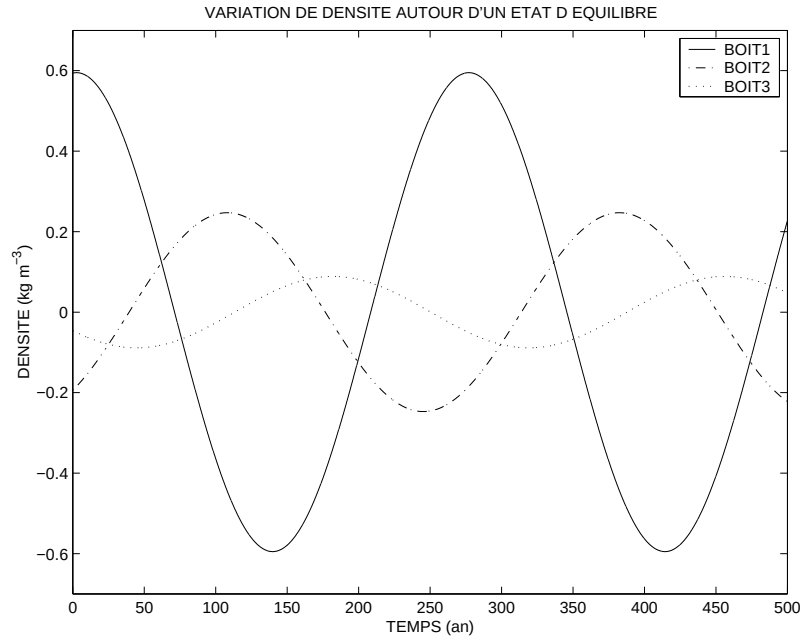


FIG. 3 – Variations temporelle autour d'un état d'équilibre de la densité du quatrième mode pour le point fixe correspondant à $U = 21.81$ Sv.

2.3 Mécanismes

Il existe différentes façons de réduire le système précédent. Une première serait de réduire le nombre de boîtes actives, ainsi le nombre de variables se verrait restreint et les résultats seraient plus facilement interprétables analytiquement. On peut alors penser à un système à deux boîtes ou une seule boîte serait active (on garde la boîte 1 et on réunit en une seule boîte la 2 et la 3). On est alors dans le cas d'un système à deux inconnues, la salinité et la température de la boîte active. L'étude de stabilité autour de l'état d'équilibre nous donne que des résultats réels, il n'y a donc pas d'oscillations possibles.

NB : on ne peut avoir de conservation de la salinité dans un tel système, la boîte inactive agissant comme un rappel halin.

Il est alors intéressant de regarder un système à deux boîtes actives, l'augmentation du nombre de degrés de liberté pourrait permettre l'apparition d'oscillations. Le résultat analytique est bien plus complexe à évaluer, mais le calcul aux perturbations, et surtout la diagonalisation de la matrice linéaire tangente, peut s'effectuer analytiquement. Dans une gamme de paramètres classique de la circulation thermohaline (valeurs équivalentes à celles employées dans la résolution des valeurs numériques faite précédemment), on peut remarquer l'absence d'oscillation. Ceci peut être compris par le fait qu'une perturbation voulant se propager dans un système à deux boîtes va devoir être advecté d'une boîte à l'autre. Il existe alors un instant où la différence de densité entre les boîtes dû à l'anomalie n'existe plus, à ce même moment le système n'a plus de raison d'évoluer, la variation d'anomalie s'arrête ainsi.

NB : dans un modèle à deux boîtes actives, la salinité ne présente qu'un seul degré de liberté, la conservation de celle-ci étant utilisée.

Un deuxième moyen de réduire le nombre de variables du système, afin de mieux déterminer les mécanismes physiques provoquant ces oscillations, serait de découpler les équations en température et salinité. Dans le but de séparer ces deux variables, il convient d'estimer leur influence sur la densité et u' . Alors, pour chaque grandeur, en température et en salinité de chacune des trois boîtes, nous allons estimer sa norme. Étant donné les équations d'ondes

définies précédemment, on se propose de fixer la norme d'une variable par :

$$N = \sqrt{V_r^2 + V_i^2} \quad (21)$$

. Puis l'on comparera la valeur moyenne de cette norme (Tab. 4), pour la salinité et la température affublés de leurs coefficients respectifs, soit de contraction haline β ou d'expansion thermique α .

$$N_{S'} = \frac{1}{3} \left(N_{S'_1} + N_{S'_2} + N_{S'_3} \right) \quad (22a)$$

$$N_{T'} = \frac{1}{3} \left(N_{T'_1} + N_{T'_2} + N_{T'_3} \right) \quad (22b)$$

Normes	N
T'_1 ($^{\circ}\text{C}$)	0.3662
T'_2 ($^{\circ}\text{C}$)	0.1860
T'_3 ($^{\circ}\text{C}$)	0.0671
S'_1 (psu)	0.8200
S'_2 (psu)	0.3561
S'_3 (psu)	0.1304
$\beta N_{S'}$	$\alpha N_{T'}$
0.3401	0.0344

TAB. 4 – Valeurs des normes de chaque oscillation.

On remarque alors que $\beta N_{S'} \gg \alpha N_{T'}$. On se propose alors d'étudier prioritairement les oscillations salines, dans la suite du développement, nous prendrons toujours $x' = 0$, soit toute la variabilité seulement fonction de la salinité. De plus, on peut écrire symboliquement la relation entre le terme d'évolution temporelle de salinité, l'advection et la salinité comme :

$$\dot{y}' = -u'Y - Uy' \quad (23)$$

, avec $u' = \alpha\alpha x' - \beta y'$ et $U = \alpha\alpha X - \beta Y$. Dans la suite, la salinité sera traitée comme un traceur passif, elle n'influence pas la circulation ($\partial_Y U = 0$) ce qui n'était pas le cas d'après l'équation (2a) et la formulation symbolique ci-dessus, pour cela on prendra cette salinité moyenne nulle ($Y_i = 0$). La formulation symbolique (23) se simplifie donc en :

$$\dot{y}' = -Uy' \quad (24)$$

. Dans un deuxième temps on se propose d'étudier la salinité sous forme de traceur actif, ceci correspond au fait que $\partial_Y U \neq 0$ et $Y_i \neq 0$. On reprendra alors l'équation symbolique (23) intégralement.

2.3.1 Salinité en traceur passif

Ainsi, dans la suite nous allons nous intéresser à des oscillations purement salines, dans une circulation globale constante. Ceci se traduit dans les équations aux perturbations par : $x'_i = 0$ et $Y_i = 0$ ce qui nous amène à :

$$\dot{y}'_1 = U (y'_3 - y'_1) \quad (25a)$$

$$\dot{y}'_2 = \epsilon U (y'_1 - y'_2) \quad (25b)$$

$$\dot{y}'_3 = \frac{\delta}{1 - \delta} U (y'_2 - y'_3) \quad (25c)$$

avec : $U = a\delta [X_1 - X_2]$.

De plus, par conservation de la salinité on a : $(V_1 S'_1 + V_2 S'_2 + V_3 S'_3 = 0)$

$$y'_1 + \frac{1}{\epsilon} y'_2 + \frac{1-\delta}{\delta} y'_3 = 0 \quad (26)$$

. En utilisant cette équation de conservation de la salinité on peut alors étudier un système de deux équations à deux inconnues (on pourra toujours retrouver la troisième inconnue par cette relation de conservation).

$$\dot{y}'_1 = -U \left[\frac{1}{1-\delta} y'_1 + \frac{\delta}{(1-\delta)\epsilon} y'_2 \right] \quad (27a)$$

$$\dot{y}'_2 = \epsilon U (y'_1 - y'_2) \quad (27b)$$

On trouve alors les deux valeurs propres du système :

$$\lambda_{\pm} = -\frac{U}{2} \left(\frac{1}{1-\delta} + \epsilon \right) \pm c \frac{U}{2} \sqrt{\|\Delta\|} \quad (28)$$

où $\Delta = \left(\frac{1}{1-\delta} + \epsilon \right)^2 - 4 \frac{\epsilon+\delta}{1-\delta}$, et $c = 1$ si $\Delta \geq 0$ ou $c = i$ si $\Delta < 0$.

Cette expression montre la forte dépendance des oscillations, d'un tel système réduit, à la géométrie. En effet, d'après la relation définissant les deux valeurs propres du système, pour que celle-ci soit complexe, il faut avoir $\Delta < 0$. Soit $[1/(1-\delta) - \epsilon]^2 - 4\delta/(1-\delta) < 0$, les paramètres δ et ϵ n'étant fonction que des rapports de volume entre les boîtes. Les régimes oscillatoires sont directement dépendants de la géométrie et surtout du rapport des volumes de notre modèle de circulation thermohalin (Fig. 4).

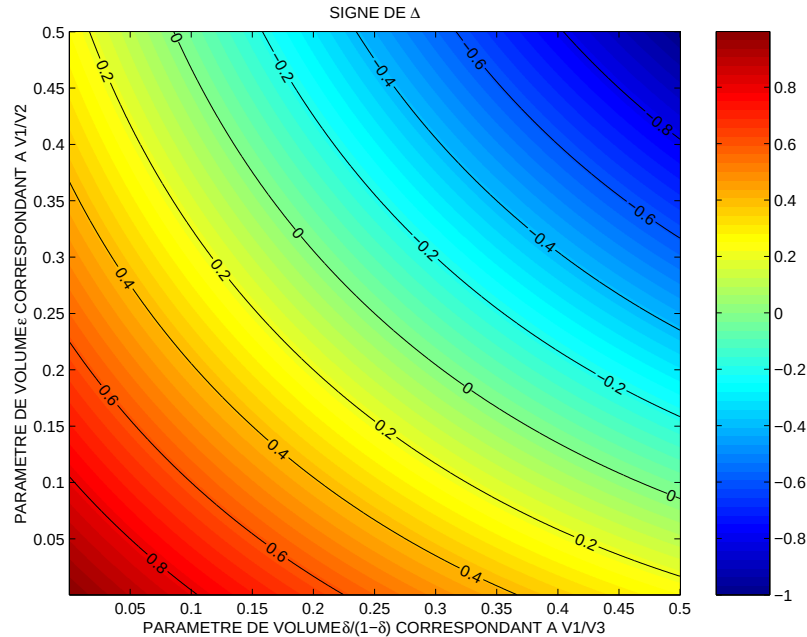


FIG. 4 – Signe du discriminant Δ en fonction des deux paramètres de volume, δ et ϵ . Quand le signe du discriminant est négatif, il y a des oscillations.

Dans la gamme de paramètres équivalente aux calculs précédents, on arrive à des structures oscillantes (Tab. 5) représentés dans la Fig. 5 et reconstruits sur la Fig. 6. Le mécanisme qui permet l'apparition d'oscillation, dans un tel système limité à une circulation moyenne forcée par la température, est le même que le mécanisme qui empêche la propagation d'une anomalie

λ^{-1} (ans)	$-29.0583 \pm 10.9830i$
S'_1 (psu)	$-0.5145 \pm 0.4537i$
S'_2 (psu)	0.6860
S'_3 (psu)	$-0.2144 \mp 0.1134i$
u' (Sv)	$12.389 \pm 0.886i$

TAB. 5 – Temps relatif de (dé)croissance ou période des modes et structure des modes autour de l'état d'équilibre correspondant à un flux inter-boîte de $U = 21.81$ Sv, en prenant la salinité comme traceur passif. Il y a des oscillations.

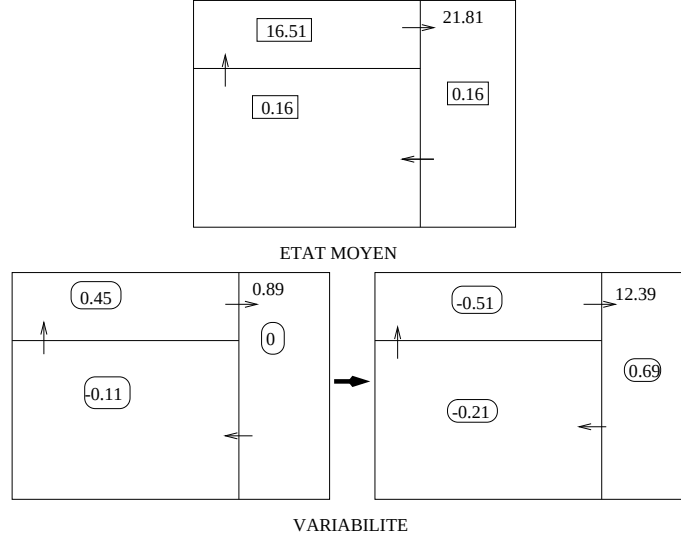


FIG. 5 – Illustration de la structure des variations. L'état moyen à gauche et les deux phases de variabilité à droite. Les termes d'advection étant sur les flèches, de salinité entouré, les termes encadrés étant la température.

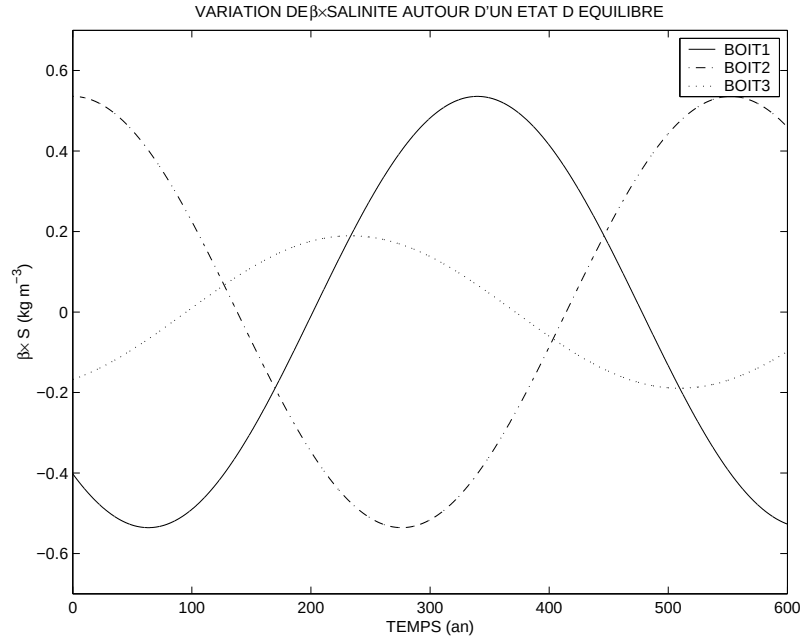


FIG. 6 – Variations temporelle autour d'un état d'équilibre de la densité (seulement fonction de la variabilité de salinité), pour le point fixe correspondant à $U = 21.81$ Sv.

dans un système à trois boîtes. En effet, quand le système s'arrête de lui même dans un modèle à deux boîtes, on a ici la possibilité de conserver une partie de l'anomalie dans la troisième boîte. Cette troisième entraîne une répartition de l'anomalie qui permet de ne jamais avoir un instant où l'anomalie entre les boîtes est nulle. Cette boîte instaure un mécanisme de délai, de retard de l'information (ici, l'anomalie de densité), qui permet l'existence d'oscillations. Nous pouvons en outre remarquer que le fait d'avoir trois boîtes permet d'avoir deux variables salines, soit deux degrés de liberté, nombre nécessaire pour obtenir des oscillations.

On se propose dans ce petit calcul d'évaluer l'influence du forçage sur les oscillations. Jusqu'ici, la salinité était forcée par des flux de surface qui permettaient de conserver sa masse. On se propose de forcer le système salin par une relaxation vers une salinité de surface, les deux équations de surfaces seront modifiées. Dans ce petit modèle la masse de sel n'est plus conservée, la variable de sel est donc soumise au même condition de forçage que la température. On arrive alors aux équations du type :

$$\dot{y}'_1 = U (y'_3 - y'_1) - b y'_1 \quad (29a)$$

$$\dot{y}'_2 = \epsilon U (y'_1 - y'_2) - \epsilon b y'_2 \quad (29b)$$

$$\dot{y}'_3 = \frac{\delta}{1 - \delta} U (y'_2 - y'_3) \quad (29c)$$

avec : $U = a\delta (X_1 - X_2)$

Le système peut alors se simplifier en un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}'_1 \\ \dot{y}'_2 \\ \dot{y}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U - b & 0 & U \\ \epsilon U & -\epsilon U - \epsilon b & 0 \\ 0 & \delta U / (1 - \delta) & -\delta U / (1 - \delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (30)$$

De la même façon que précédemment, nous allons évaluer numériquement les valeurs propres du système en fonction du paramètre de relaxation b . L'influence du paramètre de relaxation, b , est représenté dans la figure 7. On peut voir que ce paramètre paraît très influant, puisque pour que b , dans notre régime de paramètre, interdise les oscillations, il suffit que ce derniers atteigne la valeurs de 9.4×10^{-3} ce qui correspond à un temps de relaxation de 32.26 ans, ce qui est loin d'être rapide. Pour exemple, la température est, dans notre modèle, relaxé en 0.82 ans ce qui est plus de 50 fois plus rapide. On peut alors imaginer que les oscillations sont fortement inhibées par ce type de forçage.

2.3.2 Salinité en traceur actif

Dans cette partie, on se propose d'étudier comme précédemment, la variabilité saline du sous-système mais en prenant en compte l'état moyen de la circulation : il est donné par la salinité moyenne qui n'est plus nulle ($Y_i \neq 0$). Ce sous-système légèrement plus réaliste que son prédécesseur, puisque ici on s'intéresse à la globalité du système sel-sel, soit à l'étude du système :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}'_1 \\ \dot{y}'_2 \\ \dot{y}'_3 \end{pmatrix} = A_{22} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Les équations s'écrivent :

$$\dot{y}'_1 = u' (Y_2 - Y_1) + U (y'_3 - y'_1) \quad (32a)$$

$$\dot{y}'_2 = \epsilon [u' (Y_1 - Y_2) + U (y'_1 - y'_2)] \quad (32b)$$

$$\dot{y}'_3 = \frac{\delta}{1 - \delta} U (y'_2 - y'_3) \quad (32c)$$

avec : $u' = -\delta y'_1 + y'_2 - (1 - \delta) y'_3$,

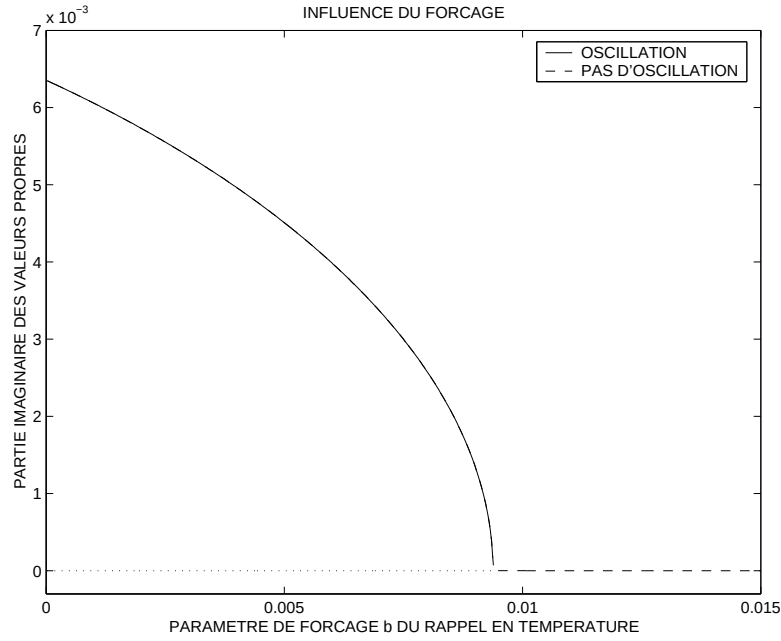


FIG. 7 – L’influence du forçage sur l’existence d’oscillation apparait clairement ici. La paramétrisation d’une relaxation inhibe la capacité du modèle à osciller. On peut remarquer que plus le temps de relaxation est rapide, plus la période des oscillations augmentent, jusqu’à une valeur de relaxation critique, $b = 9.4 \times 10^{-3}$, où la période devient infinie et le régime devient non-oscillant.

$$\text{et } U = a\delta (X_1 - X_2) - \delta (Y_1 - Y_2).$$

Ce type de régime se caractérise dans notre gamme de paramètre par les valeurs propres et les vecteurs propres explicités dans le Tab. 6 et représentés dans la Fig. 8. Nous pouvons voir ici l’allongement de la période à des valeurs très proches de celle du modèle complet. Les

λ^{-1} (ans)	$-13.9921 \pm 37.4396i$
S'_1 (psu)	0.9163
S'_2 (psu)	$-0.3069 \mp 0.2201i$
S'_3 (psu)	$-0.0756 \pm 0.1100i$
u' (Sv)	$4.203 \mp 4.297i$

TAB. 6 – Temps relatif de (dé)croissance ou période des modes et structure des modes autour de l’état d’équilibre correspondant à un flux inter-boîte de $U = 21.81$ Sv, en prenant la salinité comme traceur actif. Il y a des oscillations.

différences qui subsistent entre ces valeurs et celle du modèle global est dû à l’existence des termes de couplage entre salinité et température. On rappelle que l’évolution de la salinité est donné dans le cas général par :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}'_1 \\ \dot{y}'_2 \\ \dot{y}'_3 \end{pmatrix} = (A_{21} \mid A_{22}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Néanmoins ce sous-système nous permet d’entrevoir le mécanisme oscillatoire mis en jeu ici. L’expression symbolique (23) peut se réécrire $\dot{y}' = \beta Y y' - U y'$, si on néglige les variations

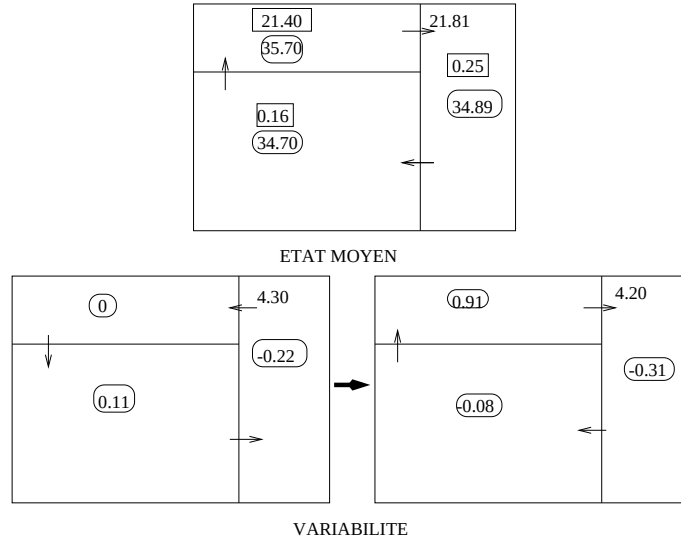


FIG. 8 – Illustration de la structure des variations. L'état moyen à gauche et les deux phases de variabilité à droite. Les termes d'advection étant sur les flèches, de salinité entouré, les termes encadrés étant la température.

en température ($x' = 0$). Dans cette expression, Marotzke (1996) nous décrit deux feedbacks thermohalins :

- le transport de sel, le terme en βY agissant ici comme un feedback positif,
- le flot moyen U agit ici comme feedback négatif, mais cette circulation moyenne est retardée par l'existence de la troisième boîte comme expliqué précédemment.

Cette dualité de feedback, qui fait à la fois croître la perturbation et l'inhibe et le délai entre eux, semble convenir pour expliquer les oscillations décrites précédemment.

2.3.3 Température

Dans cette partie, on se propose d'étudier le sous-système lié à la température, le sous-système qui se caractérise par l'utilisation de la partie supérieure gauche de la matrice linéaire tangente (Eq 17). On peut le caractériser par la relation :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = A_{11} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Ce sous-système pouvant être étudié comme précédemment, en prenant la température comme traceur passif (ne modifiant pas l'advection global), puis comme traceur actif. Mais à la différence de l'étude sur la salinité, on n'obtient jamais d'oscillations.

- Dans le premier cas, on peut voir que le système d'équation s'exprime comme la relation (30), les conclusions sont donc les mêmes. Du fait de la présence de b , paramètre caractérisant un forçage par rappel en surface, les oscillations sont inhibées. Dans notre régime de paramètre (rappel en 0.82 ans), il n'y a pas d'apparition de variabilité temporelle.
- Dans le cas du traceur actif, on peut voir que outre le terme de forçage (qui comme on l'a montré a une importance) il existe une différence. En effet, les deux sous-matrices A_{11} et A_{22} s'écrivent de la même façon (respectivement en température et salinité) à un signe près. Ce signe provient de l'expression de la perturbation sur l'advection qui peut être résumé symboliquement par : $u' = U_0 (a\alpha T - \beta S)$, on peut voir que la salinité et la température agissent de manière opposée sur l'advection, leur comportement diffère. De plus, dans notre expression matricielle on a bien $X_2 > X_1$ et $Y_2 > Y_1$, les comportements

de ces deux sous-systèmes ne sont donc pas les mêmes. Marotzke (1996) dans son étude sur les feedbacks thermohalins, prédit un comportement différent entre le transport en salinité et en température, le premier correspondant à un feedback positif et le deuxième à un feedback négatif.

Ici, les différences avec le sous-système halin amènent toujours à inhiber les oscillations, ceci tend à confirmer que les oscillations du système global est plutôt dû à la salinité, bien que la circulation moyenne soit forcée prioritairement par la température.

2.4 Influence du forçage en eau douce

La forte dépendance des oscillations à la salinité nous fait penser à faire varier le gradient de celui-ci entre nos différentes boîtes. Afin de changer ces différences nous utiliserons le forçage en flux d'eau douce FW, correspondant au paramètre f dans les équations adimensionnées. On se propose pour cela de faire évoluer l'indice d'évaporation/précipitation i_{EP} entre les valeurs 0.0 et 3.0 m an^{-1} . Notre modèle voit le flux d'eau douce comme un apport de sel ($FW = i_{EP}WL_1S_0$) positif si il y a évaporation ($+FW$) comme dans la boîte 1 et négatif si il y a précipitation ($-FW$) comme dans la boîte 2. Nous allons dans ces différents cas étudier la stabilité de la circulation autour des différents points fixes permis par le modèle upstream. Pour cette étude nous reprendrons l'analyse en perturbations linéarisées déjà effectuée pour la valeur de $i_{EP} = 1.0 \text{ m an}^{-1}$. Le type de stabilité est représenté dans Fig. 9 en fonction de la circulation moyenne (point fixe) possible pour les différentes valeurs prises par i_{EP} .

2.4.1 Système complet

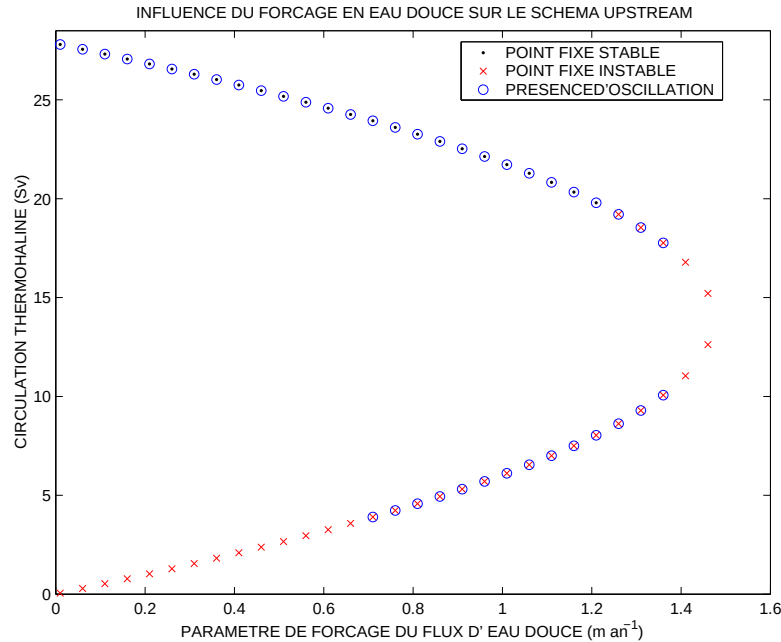


FIG. 9 – Diagramme de bifurcation des différents points fixes dans notre modèle upstream. Nous pouvons voir que la branche supérieur possède des oscillations stables, se déstabilisant. Cette déstabilisation s'opère sur les valeurs propres complexes. Ceci est caractéristique d'une bifurcation de Hopf.

Nous pouvons visualiser grâce à la figure 9 la forte variation de circulation induite par le changement de ce paramètre, qui paraissait relativement faible après adimensionalisation. On remarque l'inexistence de solution pour $i_{EP} > 1.5 \text{ m an}^{-1}$, il n'y a plus de point fixe réel positif. On peut en outre voir la présence d'oscillation, à la fois sur la branche de faible

circulation, qui se déstabilise vers les $U < 0$ (impossible dans ce type de modèle), et sur la branche de forte circulation. Nous pouvons aussi remarquer le changement de stabilité de la circulation forte qui se déstabilise autour de 20 Sv (Tziperman et al., 1994) (Dijkstra, 2000). Cette bifurcation est d'autant plus intéressante qu'elle s'opère sur un système oscillant. Après vérification, on remarque que cette déstabilisation s'opère sur la même valeur propre que celle qui induit la variabilité, il y a bifurcation de Hopf. Avec Fig 10 on voit plus précisément cette

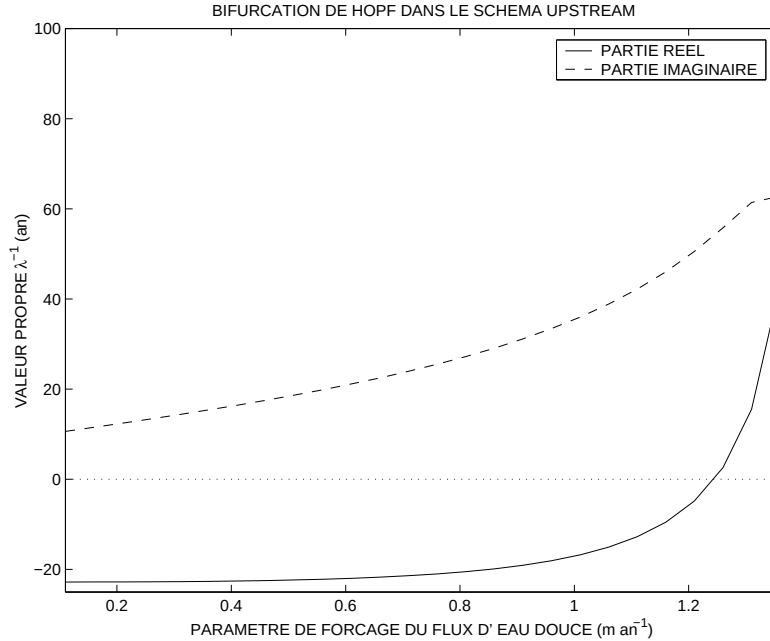


FIG. 10 – On peut voir sur le graphique le changement de signe de la partie réelle de la valeur propre pour une circulation ~ 20 Sv, dans notre modèle upstream. Ce type de changement de signe est appelé bifurcation de Hopf. On passe de spirales décroissantes ($\lambda_r < 0$) vers un point fixe avec cycle limite ($\lambda_r = 0$) à des spirales croissantes ($\lambda_r > 0$). On voit que le flux d'eau douce influence fortement la stabilité du point fixe.

bifurcation, on peut noter que pour une valeur où $\lambda_i \neq 0$, on a bien λ_r qui change de signe. Ce type de raisonnement laisse supposer l'existence d'un cycle limite en $\lambda_r = 0$, il y aurait à cette endroit oscillation perpétuelle possible.

L'apparition de changement d'état de stabilité, voir de bifurcation, lors des variations du paramètre de précipitation/évaporation, et d'autant plus étonnant que ce paramètre qui se caractérise par f en adimensionné n'est pas directement présent dans les équations aux perturbations. En fait, f a pour seul effet de changer l'état moyen du système, la circulation, les températures et les salinités moyennes (la valeur des points fixes).

2.4.2 Sous-système

Le premier sous-système étudié correspondait à un modèle salin en traceur passif. Nous avons montré analytiquement le genre de résultat que l'on pouvait en attendre. Il apparaissait d'ailleurs la possibilité d'existence d'oscillations. On peut en ressortir la formulation de la partie réelle de la valeur propre correspondant à un mode oscillant $\lambda_r = -U(\epsilon + \delta + 1)/2$, On voit clairement que l'on a toujours $\lambda_r < 0$. Le signe de λ_r ne pouvant évoluer vers 0 (sans prendre $U = 0$), on est dans l'incapacité d'avoir un cycle limite.

Le deuxième sous-système étudié correspondait à un modèle salin en traceur actif. On se propose alors d'effectuer la même expérience que pour le système global (Fig. 11).

On peut voir la grande ressemblance des Fig. 11 et Fig. 9. La branche inférieure étant, dans le cas du sous-système, sans présence de variabilité, mais comme pour le système global,

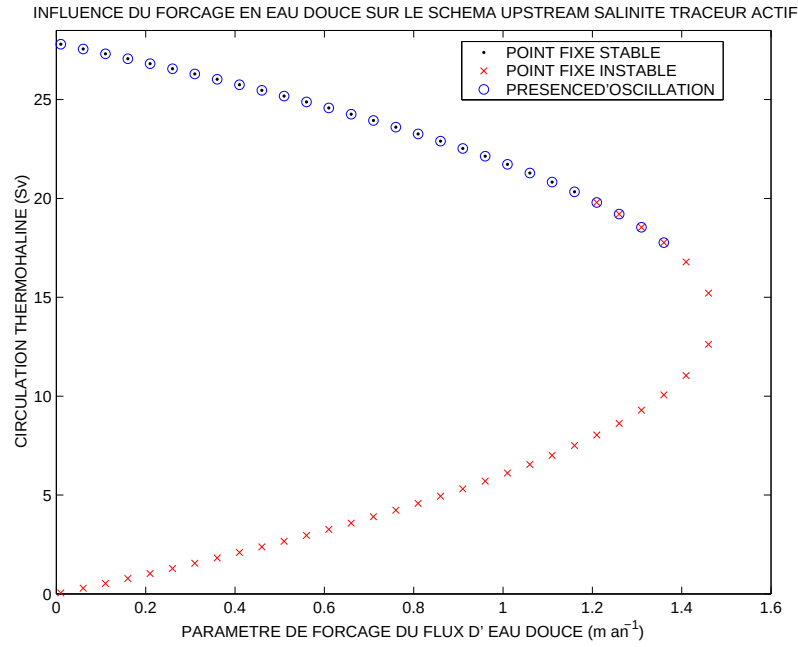


FIG. 11 – Diagramme de bifurcation des différents points fixes du sous-système salinité en traceur actif dans notre modèle upstream . Nous pouvons voir que la branche supérieure possède des oscillations stables, se déstabilisant. Cette déstabilisation s’opère sur les valeurs propres complexes. Ceci est caractéristique d’une bifurcation de Hopf.

toujours instable. Nous pouvons remarquer l’existence d’oscillation dans la branche supérieure comme le préconisait l’analyse sur la variabilité (§ 2.3). On peut, en outre, voir la présence d’une déstabilisation de cette branche autour de 20 Sv. Cette bifurcation se trouve être ici aussi une bifurcation de Hopf (figure 12), il y a donc présence d’un cycle limite.

Ce sous-modèle, représentant la partie $\mathbf{A}_{22}$ de la matrice $\mathbf{A}$ du système global, semble une bonne représentation de la stabilité du système global. Surtout que l’état de stabilité et les bifurcations dans la branche supérieure se font dans un régime de paramètre équivalent à ceux du système global.

La présence de bifurcation dans ce sous-modèle, ainsi que l’analyse précédente montrant que l’échelle de temps de la variabilité interne au sous-système est une bonne représentation du système global, montre que le sous-système salin actif est représentatif du système global. Les différence qu’il peut rester viennent des termes de couplage entre salinité et température soit de la matrice $\mathbf{A}_{21}$.

2.5 Intégration non-linéaire

Nous allons dans cette partie faire une analyse numérique de notre système dynamique. Pour cela nous allons intégrer les équations non-linéaires de notre système globale. Une première expérience serait de lancer un run dans les conditions qui ont permis le premier calcul de variabilité. Celle-ci ne présente que peu d’intérêt puisque les oscillations sont bien trop écrasées pour ce qui est du point fixe de forte amplitude, et que le point de plus faible amplitude se déstabilise vers les $U < 0$ impossible à résoudre avec notre schéma. Afin de maximiser nos chances de voir de la variabilité on se place dans un régime proche de la bifurcation de Hopf vue précédemment tout en restant du côté stable (on choisit $i_{FW} = 1.32 \text{ m an}^{-1}$ correspondant à une circulation de 18.40 Sv). Ceci nous permet d’atteindre un régime où $\lambda_r \ll \lambda_i$, ce régime permet en effet de rendre plus long le temps de décroissance des perturbations dans le régime stable (Fig. 13).

Deux choses apparaissent clairement sur cette expérience :

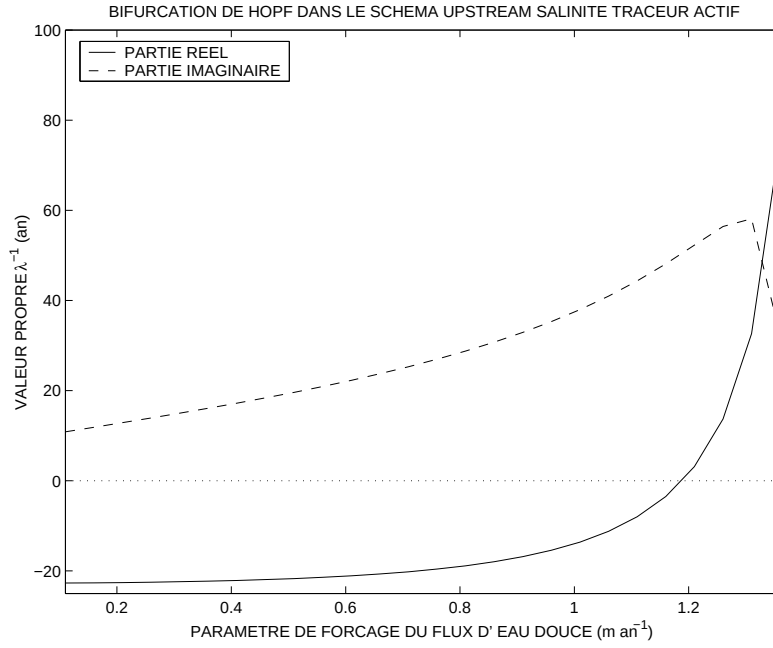


FIG. 12 – On peut voir sur le graphique le changement de signe de la partie réel de la valeur propre pour une circulation ~ 5 Sv, du sous-système salinité en traceur actif dans notre modèle upstream . Ce type de changement de signe est appelé bifurcation de Hopf. On passe de spirales décroissantes ($\lambda_r < 0$) vers un point fixe avec cycle limite ($\lambda_r = 0$) à des spirales croissantes ($\lambda_r > 0$). On voit que le paramètre d'eau douce influence fortement la stabilité du point fixe.

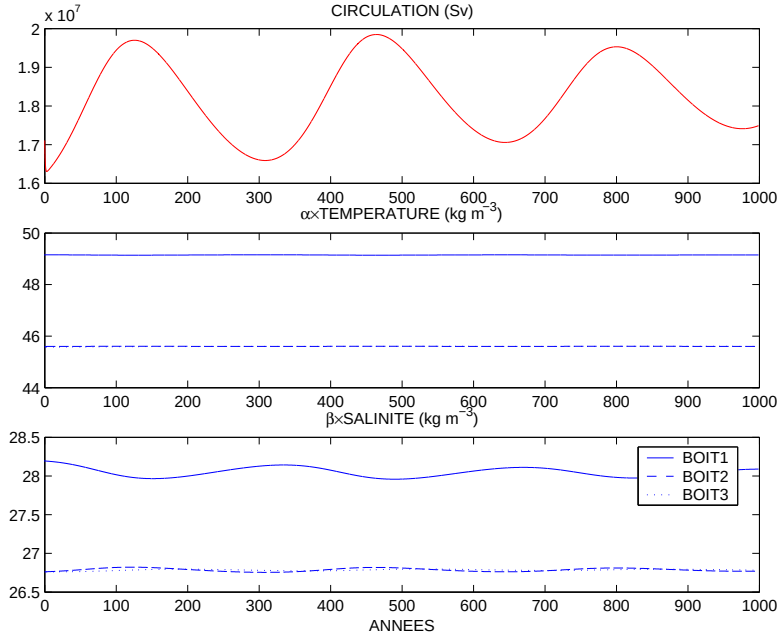


FIG. 13 – Intégration non-linéaire du modèle upstream complet dans un état stable près de la bifurcation ($i_{FW} = 1.32 \text{ m an}^{-1}$ et $U = 18.40$ Sv) : il y a des oscillations. On remarque la plus grosse signature sur la densité de la température et la plus forte signature en variabilité de la salinité.

- Il y a présence de variabilité.
- αT est deux fois plus grand que βS , la température domine la circulation moyenne, mais seule la salinité présente de la variabilité, c'est la salinité qui domine la variabilité.

Ces résultats numériques tendent à confirmer les résultats linéaires et l'interprétation de ceci. En effet seul la salinité présente une signature de variabilité, c'est donc bien le sous-système salin qui est à l'origine de la variabilité.

3 Formulation centrée

Dans cette partie, on se propose d'étudier une autres formulations représentant la circulation thermohaline afin de tester la rosbustesse des résultats du schéma upstream.

3.1 Analyse

La principale différence avec le modèle précédent est la possibilité (de part le nouveau système d'équation) qu'à la circulation à aller dans le sens opposé à la circulation classique (de l'équateur au pôle en surface et le contraire en subsurface). Le modèle reste un modèle à trois boîtes de même dimension. Le transport de masse et l'équation d'état de la densité reste les mêmes qu'avant. Ici, la modélisation de la dynamique de chaque boîte est exprimé par un schéma centré d'ordre un, la variation d'une grandeur physique dans une boîte est directement liée au gradient de cette grandeur au frontière de cette boîte.

Les équations de ce schéma s'écrivent comme :

$$U = U_0 [\delta \alpha T_1 - \alpha T_2 + (1 - \delta) \alpha T_3 - \delta \beta S_1 + \beta S_2 - (1 - \delta) \beta S_3] \quad (35a)$$

$$\partial_t T_1 = \frac{U}{V_1} (T_3 - T_2) + \frac{\kappa}{V_1} (T_3 - T_1) + \gamma (T_1^* - T_1) \quad (35b)$$

$$\partial_t T_2 = \frac{U}{V_2} (T_1 - T_3) + \gamma (T_2^* - T_2) \quad (35c)$$

$$\partial_t T_3 = \frac{U}{V_3} (T_2 - T_1) + \frac{\kappa}{V_3} (T_1 - T_3) \quad (35d)$$

$$\partial_t S_1 = \frac{U}{V_1} (S_3 - S_2) + \frac{\kappa}{V_1} (S_3 - S_1) + \frac{FW}{V_1} \quad (35e)$$

$$\partial_t S_2 = \frac{U}{V_2} (S_1 - S_3) - \frac{FW}{V_2} \quad (35f)$$

$$\partial_t S_3 = \frac{U}{V_3} (S_2 - S_1) + \frac{\kappa}{V_3} (S_1 - S_3) \quad (35g)$$

On utilise en outre un terme de diffusion vertical modélisant de manière conservative le mélange entre la boîte d'eau profonde (boîte 3) et celle de surface (boîte 1). L'addition de ce mécanisme permet d'éviter que l'état d'équilibre induise $T_1 = T_2$ et $S_1 = S_2$ (35d et 35g avec $\partial_t = 0$) ce qui n'est pas réaliste étant donné la forme du forçage (notez que ce problème n'apparaissait pas dans le modèle upstream).

3.1.1 Adimensionnalisation

On passe par la même adimension que précédement :

$$x_i = T_i / T_1^* ; y_i = S_i / S_0 \text{ avec } i = 1, 2, 3,$$

$$\tau = t (U_0 \beta S_0) / V_1 ;$$

On peut en outre vérifier le théorème π de Buckingham. On passe maintenant de 18 variables à 13 paramètres indépendants adimensionnés, puisque l'on a 5 unités fondamentales dans notre système d'équation : les 17 variables du système d'équation $V_i, T_i, S_i, U_0, \alpha, \beta, \gamma, \kappa, T_{1,2}^*, FW$ et S_0 , sachant que $i = 1, 2, 3$; les 5 unités fondamentales étant : m, K, psu, kg, s.

En posant $\dot{x}_i = \partial_\tau x_i$ et $\dot{y}_i = \partial_\tau y_i$ ($i = 1, 2, 3$). Ainsi que $a = \alpha T_1^* / \beta S_0$; $b = \gamma V_1 / U_0 \beta S_0$; $c = \kappa / (U_0 \beta S_0)$; $f = FW / (U_0 \beta S_0^2)$; $x^* = T_2^* / T_1^*$ et $\epsilon = \delta / r$, dans la suite. On obtient 13 paramètres indépendants adimensionnés : x_i , s_i , δ , ϵ , a , b , c , x^* et f (avec toujours $i = 1, 2, 3$). On arrive alors au système d'équations :

$$\dot{x}_1 = U(x_3 - x_2) + c(x_3 - x_1) + b(1 - x_1) \quad (36a)$$

$$\dot{x}_2 = \epsilon U(x_1 - x_3) + b(x^* - x_2) \quad (36b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\delta}{1 - \delta} U(x_2 - x_1) + \frac{\delta}{1 - \delta} c(x_1 - x_3) \quad (36c)$$

$$\dot{y}_1 = U(y_3 - y_2) + c(y_3 - y_1) + f \quad (36d)$$

$$\dot{y}_2 = \epsilon U(y_1 - y_3) - \epsilon f \quad (36e)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{\delta}{1 - \delta} U(y_2 - y_1) + \frac{\delta}{1 - \delta} c(y_1 - y_3) \quad (36f)$$

$$U = a[\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta)x_3 - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta)y_3] \quad (36g)$$

Et on trouve alors les valeurs caractéristique (équivalentes aux expérience de Tziperman et Ionnou 2002) :

$$\delta \sim 0.20; \epsilon \sim 0.50; a \sim 1.80; b \sim 0.70; x^* \sim 0.90; c \sim 3.70 \times 10^{-3}; f \sim 5.80 \times 10^{-4}$$

Les quatres premiers paramètres sont du même ordre de grandeur. Sauf le paramètre c , provenant de la diffusion verticale, qui est ici plus faible. On ne peut pour autant le négliger, la diffusion verticale étant le seul mécanisme empêchant les grandeurs des boîtes 1 et 2 de s'égaliser (pôle toujours différent d'équateur) à l'équilibre.

3.1.2 États d'équilibre

À l'équilibre du système ($\dot{x}_i = 0$ et $\dot{y}_i = 0$; $i = 1, 2, 3$), les équations deviennent :

$$U(x_3 - x_2) + c(x_3 - x_1) + b(1 - x_1) = 0 \quad (37a)$$

$$\epsilon U(x_1 - x_3) + b(x^* - x_2) = 0 \quad (37b)$$

$$U(x_2 - x_1) + c(x_1 - x_3) = 0 \quad (37c)$$

$$U(y_3 - y_2) + c(y_3 - y_1) + f = 0 \quad (37d)$$

$$U(y_1 - y_3) - f = 0 \quad (37e)$$

$$U(y_2 - y_1) + c(y_1 - y_3) = 0 \quad (37f)$$

On peut arriver (Annexe 2) de ce système à l'équation du cinquième ordre sur l'advection :

$$\begin{aligned} (\epsilon + 1)U^5 + [bc - ab(1 - \delta)(x^* - 1) - f(\epsilon + 1)(1 - \delta)]U^3 \\ + [fc(\epsilon + 1) + abc(x^* - 1)]U^2 - fbc(1 - \delta)U + fbc^2 = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Des solutions de cette équation, on obtient les différents points fixes du système. Dans cette formulation, l'advection inverse est permise, au contraire du schéma upstream, on peut obtenir 3 points fixes physiques (les deux autres solutions étant complexes).

3.1.3 Mesure de la dissipation

On se propose dans cette partie de réutiliser le théorème de Liouville afin d'estimer la divergence du système dynamique.

$$divSD \equiv \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial y_3} \quad (39)$$

Soit

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = a\delta (x_3 - x_2) - c - b \quad (40a)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -a\epsilon (x_1 - x_3) - b \quad (40b)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = a\delta (x_2 - x_1) - \frac{\delta}{1-\delta}c \quad (40c)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} = -\delta (y_3 - y_2) - c \quad (40d)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} = \epsilon (y_1 - y_3) \quad (40e)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_3}{\partial y_3} = -\delta (y_2 - y_1) - \frac{\delta}{1-\delta}c \quad (40f)$$

$$divSD = (\delta + \epsilon) (y_1 - ax_1) - (\delta + \epsilon) (y_3 - ax_3) - 2 \left(\frac{\delta}{1-\delta} + 1 \right) c - 2b \quad (41)$$

avec $u = a [\delta x_1 - x_2 + (1 - \delta) x_3] - \delta y_1 + y_2 - (1 - \delta) y_3$

Ici aussi, on ne peut directement interpreter la divergence étant donné sa dépendance relative au point fixe.

3.1.4 Résultats

Les différents calculs effectués dans les deux chapitres précédents sont ici évalués numériquement, notamment la résolution de l'équation du cinquième degré sur l'advection. On peut ainsi voir les valeurs en température et en salinité de chacune des boîtes pour les trois solution physique de point fixe (Tab. 7).

U (Sv)	4.83	2.26	-2.23
T_1 (°C)	28.81	24.97	24.97
T_2 (°C)	0.09	0.01	0.01
T_3 (°C)	-5.01	13.49	36.31
S_1 (psu)	35.74	37.87	35.14
S_2 (psu)	34.98	32.63	29.77
S_3 (psu)	34.82	35.46	37.58
$divSD$ (ans ⁻¹)	-2.64	-2.45	-2.45

TAB. 7 – Résultats numériques aux différents points fixes.

Ces résultats ont été déterminés avec des valeurs de paramètres suivant :

$V_1 = 2.0 \times 10^{16} \text{ m}^3$; $V_2 = 4.0 \times 10^{16} \text{ m}^3$; $V_3 = 8.0 \times 10^{16} \text{ m}^3$; $S_0 = 35.0 \text{ psu}$;
 $U_0 = 4.0 \times 10^7 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} (\text{kg m}^{-3})^{-1}$; $\alpha = 0.1668 \text{ kg m}^{-3} \text{ psu}^{-1}$; $\beta = 0.781 \text{ kg m}^{-3} \text{ K}^{-1}$;
 $\gamma = 3.858 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$; $T_1^* = 295.15 \text{ K}$; $T_2^* = 273.15 \text{ K}$; $FW = 4.44 \times 10^6 \text{ psu m}^3 \text{ s}^{-1}$;
 $\kappa = 4.0 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

On peut voir que ce type schéma centré ne permet pas de réduire de manière significative la dissipation du système dynamique. Les deux formulations, upstream et centré, sont aussi dissipatives.

Nous pouvons aussi remarquer que comme précédemment les points fixes révèlent :

- un état d'équilibre dont la circulation est plutôt thermique,
- un dont la circulation est plutôt haline,
- et un dernier de circulation négative, moins intéressant dans notre étude mais qui est ici permis.

3.2 Étude de stabilité

Pour cette étude, nous utiliserons le même type de calcul que ceux effectués pour le schéma upstream. Nous réécrivons les variables avec le même type de notation, typique de l'étude aux perturbations linéarisées : $x_i = X_i + x'_i$ et $y_i = Y_i + y'_i$ ($i = 1, 2, 3$), tel que $x'_i \ll X_i$ et $y'_i \ll Y_i$. Après la linéarisation on arrive à :

$$\dot{x}'_1 = u' (X_3 - X_2) + U (x'_3 - x'_2) + c (x'_3 - x'_1) - bx'_1 \quad (42a)$$

$$\dot{x}'_2 = \epsilon [u' (X_1 - X_3) + U (x'_1 - x'_3)] - bx'_2 \quad (42b)$$

$$\dot{x}'_3 = \frac{\delta}{1-\delta} [u' (X_2 - X_1) + U (x'_2 - x'_1) + c (x'_1 - x'_3)] \quad (42c)$$

$$\dot{y}'_1 = u' (Y_3 - Y_2) + U (y'_3 - y'_2) + c (y'_3 - y'_1) \quad (42d)$$

$$\dot{y}'_2 = \epsilon [u' (Y_1 - Y_3) + U (y'_1 - y'_3)] \quad (42e)$$

$$\dot{y}'_3 = \frac{\delta}{1-\delta} [u' (Y_2 - Y_1) + U (y'_2 - y'_1) + c (y'_1 - y'_3)] \quad (42f)$$

avec : $u' = a [\delta x'_1 - x'_2 + (1-\delta) x'_3] - \delta y'_1 + y'_2 - (1-\delta) y'_3$

et $U = a [\delta X_1 - X_2 + (1-\delta) X_3] - \delta Y_1 + Y_2 - (1-\delta) Y_3$

Ce système d'équation peuvent être mis sous forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \\ \dot{y}'_1 \\ \dot{y}'_2 \\ \dot{y}'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (43)$$

où

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \quad (44)$$

avec :

$$A_{11} =$$

$$\begin{pmatrix} a\delta (X_3 - X_2) - c - b & -a (X_3 - X_2) - U & a (1-\delta) (X_3 - X_2) + U + c \\ a\epsilon\delta (X_1 - X_3) + \epsilon U & -a\epsilon (X_1 - X_3) - b & a\epsilon (1-\delta) (X_1 - X_3) - \epsilon U \\ \frac{\delta}{1-\delta} [a\delta (X_2 - X_1) - U + c] & \frac{\delta}{1-\delta} [-a (X_2 - X_1) + U] & \frac{\delta}{1-\delta} [a (1-\delta) (X_2 - X_1) - c] \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$A_{12} =$$

$$\begin{pmatrix} -\delta (X_3 - X_2) & (X_3 - X_2) & -(1-\delta) (X_3 - X_2) \\ -\epsilon\delta (X_1 - X_3) & \epsilon (X_1 - X_3) & -\epsilon (1-\delta) (X_1 - X_3) \\ \frac{\delta}{1-\delta} [\delta (X_2 - X_1)] & \frac{\delta}{1-\delta} [-(X_2 - X_1)] & \delta (X_2 - X_1) \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$A_{21} =$$

$$\begin{pmatrix} a\delta (Y_3 - Y_2) & -a (Y_3 - Y_2) & a (1-\delta) (Y_3 - Y_2) \\ \epsilon a\delta (Y_1 - Y_3) & -\epsilon a (Y_1 - Y_3) & \epsilon a (1-\delta) (Y_1 - Y_3) \\ \frac{\delta}{1-\delta} [a\delta (Y_2 - Y_1)] & \frac{\delta}{1-\delta} [-a (Y_2 - Y_1)] & \delta (Y_2 - Y_1) \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$A_{22} =$$

$$\begin{pmatrix} -\delta (Y_3 - Y_2) - c & (Y_3 - Y_2) - U & -(1-\delta) (Y_3 - Y_2) + U + c \\ -\epsilon\delta (Y_1 - Y_3) + \epsilon U & \epsilon\delta (Y_1 - Y_3) & -\epsilon (1-\delta) (Y_1 - Y_3) - \epsilon U \\ \frac{\delta}{1-\delta} [\delta (Y_2 - Y_1) - U + c] & \frac{\delta}{1-\delta} [-(Y_2 - Y_1) + U] & \frac{\delta}{1-\delta} [(1-\delta) (Y_2 - Y_1) - c] \end{pmatrix} \quad (48)$$

De la même façon que précédemment, on extrait de la matrice $\mathbf{A}$ les valeurs propres et vecteurs propres du système d'équation en la diagonalisant. On peut ainsi obtenir pour les trois type de circulation, les trois points fixes et les modes qui y sont associés (Tab 8, Tab 9 et Tab 10).

λ^{-1} (an)	-0.72	-0.82	-40.68	-17.19±108.25i	∞
T'_1 ($^{\circ}\text{C}$)	0.2902	0.9739	-0.0046	0.0113±0.0060i	0.0000
T'_2 ($^{\circ}\text{C}$)	-0.9557	0.2269	0.0434	-0.0035±0.0176i	0.0000
T'_3 ($^{\circ}\text{C}$)	0.0497	-0.0018	0.9963	0.9797	0.0000
S'_1 (psu)	0.0012	-0.0000	-0.0204	0.1318±0.0737i	0.5774
S'_2 (psu)	-0.0036	0.0001	-0.0609	-0.1208±0.0236i	0.5774
S'_3 (psu)	0.0015	-0.0001	0.0355	0.0275±0.0302i	0.5774
u' (Sv)	-5.576	3.127	6.496	7.000±0.498i	-3.6.073

TAB. 8 – Temps relatif de (dé)croissance, période et structure des modes autour de l'état d'équilibre correspondant à un flux inter-boîte de $U = 4.83$ Sv : On obtient des oscillations.

λ^{-1} (an)	-56.31	-565.77	+25.10	-0.81±0.01i	∞
T'_1 ($^{\circ}\text{C}$)	-0.0270	0.0077	0.0576	0.9564	0.0000
T'_2 ($^{\circ}\text{C}$)	-0.0083	-0.0010	0.0286	0.2708±0.1087i	0.0000
T'_3 ($^{\circ}\text{C}$)	-0.7377	0.9820	-0.9058	-0.0051±0.0056i	0.0000
S'_1 (psu)	0.6437	0.1441	0.3204	0.0019±0.0026i	0.5774
S'_2 (psu)	0.0618	-0.1198	0.2005	0.0008±0.0011i	0.5774
S'_3 (psu)	-0.1918	0.0239	-0.1803	-0.0009±0.0012i	0.5774
u' (Sv)	-6.256	6.977	-8.785	3.357±0.671i	-36.073

TAB. 9 – Temps relatif de (dé)croissance, période et structure des modes autour de l'état d'équilibre correspondant à un flux inter-boîte de $U = 1.84$ Sv. On obtient un mode croissant, ce qui suggère que l'état d'équilibre est instable.

λ^{-1} (an)	-0.82	-0.94	-6.70	-67.90	-671.89	∞
T'_1 ($^{\circ}\text{C}$)	0.9805	0.9847	-0.4337	0.0269	0.0024	0.0000
T'_2 ($^{\circ}\text{C}$)	0.1965	-0.1693	0.0678	-0.0036	0.0012	-0.0000
T'_3 ($^{\circ}\text{C}$)	-0.0018	0.0236	-0.5338	0.4025	0.9892	-0.0000
S'_1 (psu)	0.0001	-0.0326	0.7048	-0.8823	-0.0428	0.5774
S'_2 (psu)	-0.0000	0.0050	-0.0967	-0.0381	-0.1208	0.5774
S'_3 (psu)	-0.0000	0.0056	-0.1279	0.2396	0.0711	0.5774
u' (Sv)	2.938	0.597	-2.431	4.501	7.404	-36.073

TAB. 10 – Temps relatif de (dé)croissance, période et structure des modes autour de l'état d'équilibre correspondant à un flux inter-boîte de $U = -1.82$ Sv.

- De ces trois séries de résultats, on peut extraire trois caractéristique de ce type d'écoulement.
- La circulation correspondant à $U = 1.84$ Sv est instable. D'après l'analyse de stabilité, une des valeurs propres possède une partie réelle positive, $\lambda^{-1} = \mathbf{+25,10}$ ans (le troisième mode du tableau 9, noté en gras). Dans notre régime de paramètre cette circulation verra donc une perturbation grandir. D'ailleurs si l'on réintègre numériquement les équations non-linéaires globales, on peut noter que le point fixe $U = 1.84$ Sv bifurque naturellement vers le point fixe de circulation négative $U = -1.82$ Sv.
 - On peut aussi voir que le point fixe correspondant à une circulation de $U = -1.82$ Sv ne possède que des valeurs propres réelles et négatives, ce point apparait dans notre

expérience comme stable.

- Nous pouvons aussi voir la présence d'oscillations, en effet elles sont présentes pour les deux circulations positives. Mais on peut aussi remarquer que bien que pour la circulation instable de $U = 1.84$ Sv on a $\lambda_r \gg \lambda_i$ (oscillation très rapidement amortie), on a aussi pour l'autre circulation positive ($U = 4.83$ Sv) $\lambda_r \ll \lambda_i$. Dans cette expérience on peut voir des oscillations, qui ne s'amortissent qu'en plusieurs période. Le lancement du programme numérique, prenant en compte la globalité du modèle non-linéaire, montre aussi la présence d'oscillations. Ce même programme ne permettait pas de visualiser la variabilité jusqu'à maintenant (ni les oscillations dans le modèle upstream, ni les oscillations du point fixe $U = 1.84$ Sv dans le modèle centré).

3.3 Influence du forçage en eau douce

On se propose maintenant d'évaluer la dépendance de la stabilité au forçage en eau douce. On reprendra le même type d'expérience que pour le modèle upstream, mais ici, on s'autorise à évaluer les points fixes entraînant des circulations du type $U < 0$, étant donné le schéma du modèle (centré). Pour i_{EP} variant de 0.0 à 3.0 m an^{-1} nous allons étudier la stabilité de la circulation autour des différents points fixes permis par le modèle centré. Pour cette étude nous reprendrons l'analyse en perturbation linéarisée déjà effectuée pour la valeur de $i_{EP} = 1.0$ m an^{-1} . Le type de stabilité est représenté en fonction de la circulation moyenne (point fixe) induite par les différentes valeurs prises par i_{EP} (Fig. 14).

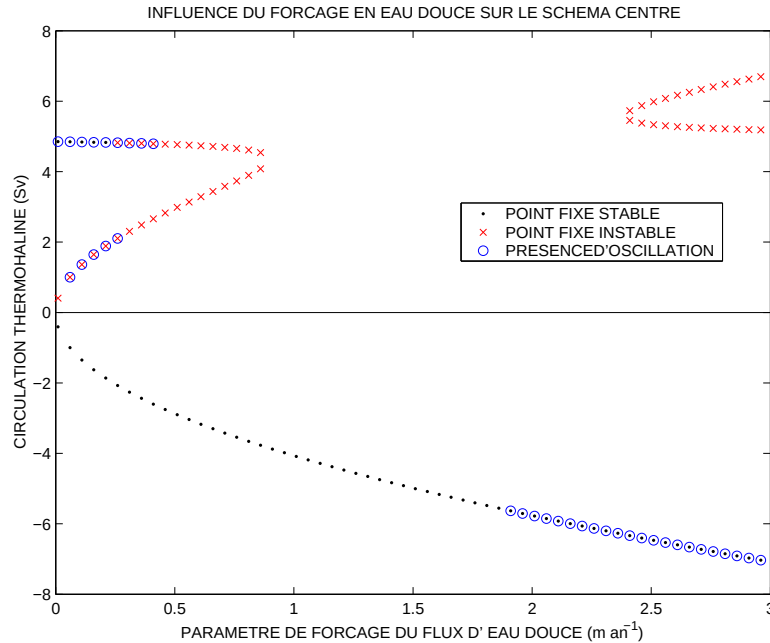


FIG. 14 – Diagramme de bifurcation des différents points fixes dans notre modèle centré. Nous pouvons voir que la branche supérieure possède des oscillations stables, se déstabilisant. Cette déstabilisation s'opère sur les valeurs propres complexes. Ceci est caractéristique d'une bifurcation de Hopf.

Ici aussi le changement de paramètre entraîne une forte variation de la circulation, tout comme pour le schéma upstream, le schéma centré montre une évolution de comportement face au flux d'eau douce. Il y a aussi une zone pour un indice de $i_{EP} = 1.0$ à 2.5 m an^{-1} où il n'y a plus de point fixe réel positif. On remarque la présence d'oscillations sur chacune des trois branches. La circulation positive de plus faible amplitude apparaît toujours instable (se déstabilisant vers les $U < 0$ pour retrouver le point fixe correspondant à un $U < 0$). De la même façon que pour le schéma upstream la circulation positive la plus forte, bien que stable

dans un premier temps, se déstabilise, mais ici autour de 5 Sv. Cette déstabilisation dans un régime oscillant se trouve être, comme pour la formulation upstream, une bifurcation de Hopf (c'est la partie réelle de la valeur propre complexe qui change de signe pour devenir positive).

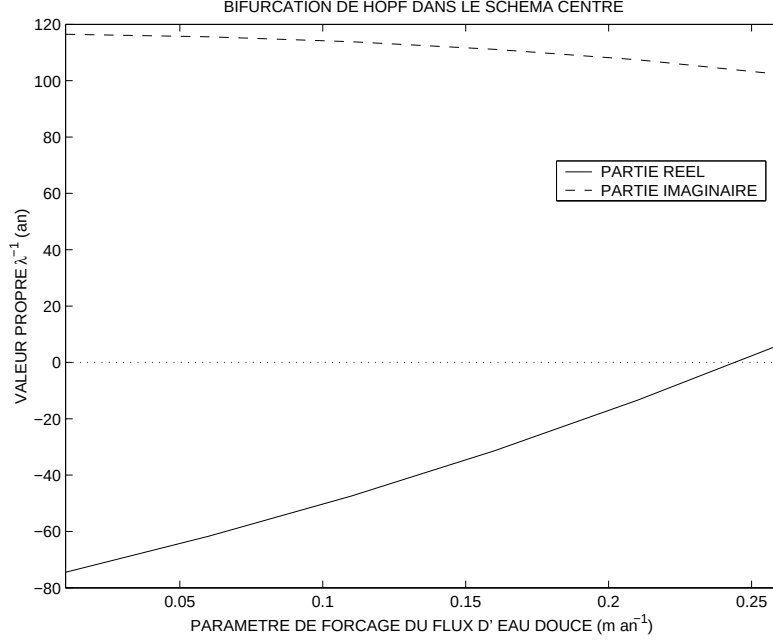


FIG. 15 – On peut voir sur le graphique le changement de signe de la partie réelle de la valeur propre pour une circulation ~ 5 Sv, dans notre modèle centré. Ce type de changement de signe est appelé bifurcation de Hopf. On passe de spirales décroissantes ($\lambda_r < 0$) vers un point fixe avec cycle limite ($\lambda_r = 0$) à des spirales croissantes ($\lambda_r > 0$). On voit que le paramètre d'eau douce influence fortement la stabilité du point fixe.

On peut voir cette bifurcation (Fig. 15) et noter que pour le mode oscillant ($\lambda_i \neq 0$) on a bien λ_r qui change de signe. Ce type de raisonnement laisse supposer l'existence d'un cycle limite ($\lambda_r = 0$), il y aurait à cet endroit oscillations perpétuelles possibles.

On rappelle que le paramètre f de précipitation/évaporation n'est pas directement présent dans notre analyse linéaire. En fait, f a pour seul effet de changer l'état moyen du système (la valeur des points fixes), qui eux sont présents dans les équations aux perturbations.

3.4 Intégration non-linéaire

Afin de valider notre analyse précédente, nous allons résoudre numériquement les équations d'évolution du modèle centré. Dans un premier temps, nous pouvons remarquer la parfaite stabilité de la circulation négative dans notre régime de paramètre. Nous commençons par lancer une expérience de la circulation positive forte (Fig. 16). Nous pouvons voir nettement des oscillations dont la signature en salinité comme le prévoyait l'étude théorique. On peut en outre remarquer la plus forte signature de la température sur la densité par rapport à la salinité, comme le montrait les valeurs théorique en ce point fixe, l'écoulement est plutôt forcé par la température.

Une deuxième expérience est de faire tendre la circulation positive forte vers son point de bifurcation tout en restant dans son domaine de stabilité (on prendra $i_{FW} < i_{FW}^c$ où i_{FW}^c représente le paramètre critique de bifurcation). Pour respecter ce régime on prend $i_{FW} = 0.24$ m an⁻¹ soit $U = 2.02$ Sv. On effectue alors deux intégrations, pour les deux circulations positives (faible, Fig. 17 et forte, Fig. 18), la dernière circulation n'ayant que peu d'intérêt puisqu'elle reste amortie et sans variabilité dans ce régime de paramètre (comme le prédisait notre analyse). On remarque que pour la circulation positive faible il y a déstabilisation, comme

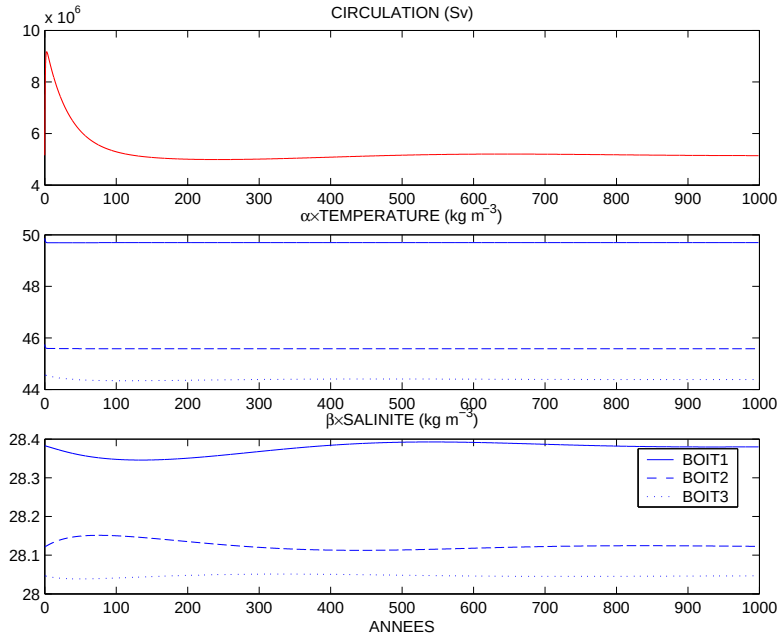


FIG. 16 – Intégration non-linéaire du modèle centré dans un état stable loin de la bifurcation ($i_{FW} = 0.1 \text{ m ans}^{-1}$ et $U = 4.84 \text{ Sv}$). Il y a des oscillations très amorties. On remarque la plus grosse signature sur la densité de la température et la plus forte signature en variabilité de la salinité.

le prévoyait le diagramme de bifurcation, le changement de point fixe s'effectue au profit de la circulation négative. En revanche la présence d'oscillation n'apparaît pas comme évidente. La circulation positive forte apparaît quantitativement comme ayant le même comportement que celui décrit dans les paragraphes précédents, il apparaît aussi que pour la première fois la température (dans la boîte 3) possède une trace de variabilité.

La dernière expérience (Fig. 19) nous amène à regarder le comportement de la circulation positive après le point de bifurcation, dans ce régime de paramètre l'analyse précédente nous laisse penser que la circulation doit se déstabiliser en oscillant vers un autre état d'équilibre, c'est un point fixe spiral. On peut voir que ce point fixe est bien instable et se déstabilise avec apparition de variabilité. On remarque d'ailleurs de fortes oscillations de la salinité mais aussi de la température de la boîte 3.

La comparaison de ces trois expériences, nous amène à voir que l'augmentation de l'indice d'évaporation/précipitation entraîne une augmentation du rôle de la salinité sur la circulation positive forte. On peut le voir par le fait que cette circulation diminue (le gradient de salinité s'oppose à la circulation positive) et aussi par le fait que la signature en densité de la salinité (βS) est de plus en plus proche de celle en température (αT), si l'on compare les trois expériences des Fig. 16, 18 et 19.

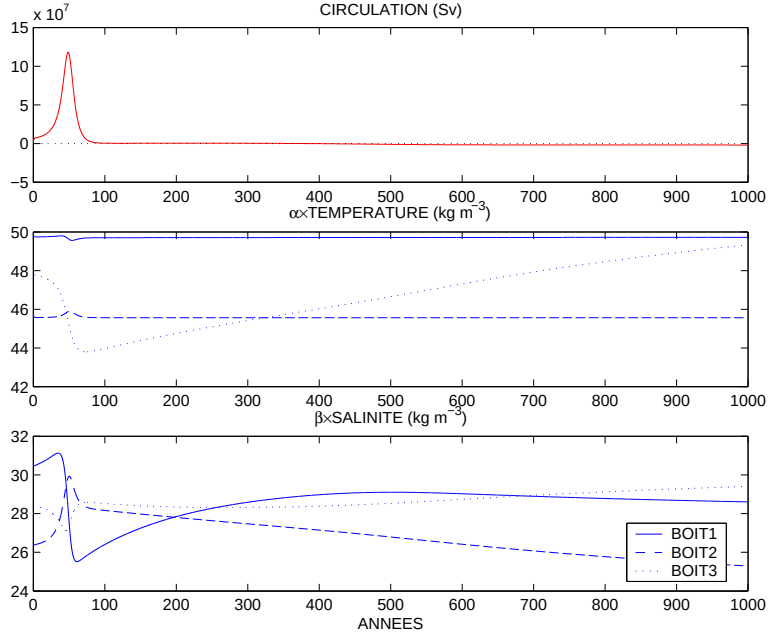


FIG. 17 – Intégration non-linéaire du modèle centré dans un état stable près de la bifurcation ($i_{FW} = 0.24 \text{ m ans}^{-1}$ et $U = 2.02 \text{ Sv}$). On remarque la plus grosse signature sur la densité de la température et la plus forte signature en variabilité de la salinité.

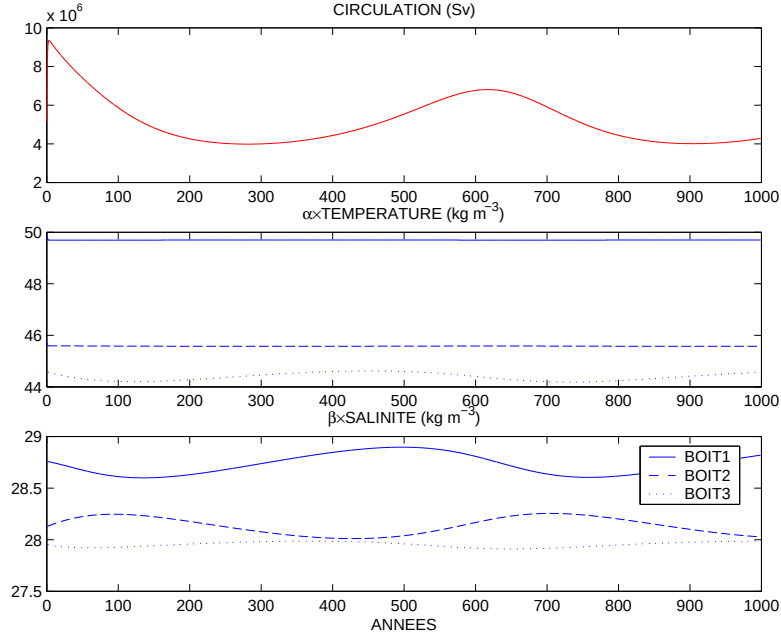


FIG. 18 – Intégration non-linéaire du modèle centré dans un état stable près de la bifurcation ($i_{FW} = 0.24 \text{ m ans}^{-1}$ et $U = 4.82 \text{ Sv}$). Il y a des oscillations. On remarque la plus grosse signature sur la densité de la température et la plus forte signature en variabilité de la salinité.

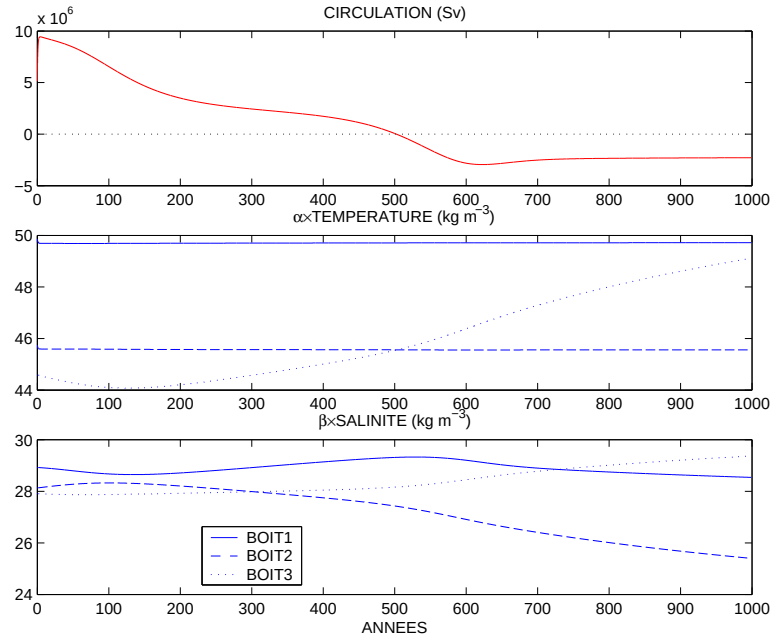


FIG. 19 – Intégration non-linéaire du modèle centré dans un état instable près de la bifurcation ($i_{FW} = 0.3 \text{ m ans}^{-1}$ et $U = 4.81 \text{ Sv}$). Il y a des oscillations. On remarque la plus grosse signature sur la densité de la température et la plus forte signature en variabilité de la salinité.

4 Conclusion

Dans le but d'étudier la variabilité et la stabilité de la circulation thermohaline, nous avons modélisé celle-ci par un modèle en boîtes. Ce modèle consiste à séparer la circulation en trois boîtes, l'une représentant la zone tropicale de surface (thermocline), une autre la zone polaire et la dernière boîte représentant la zone tropicale abyssale. En paramétrisant la circulation comme la différence de densité existant entre les boîtes (Stommel, 1961) et en utilisant différentes formulations des équations dynamiques, nous avons étudié la stabilité du système.

Cette étude s'est faite par la résolution des différents points fixes puis une analyse de stabilité linéaire et enfin une vérification de ces résultats par une méthode d'intégration numérique des formulations non-linéaires. Dans un deuxième temps nous avons évalué les différents sous-systèmes permettant d'expliquer la stabilité et les mécanismes oscillatoires du système global.

Le premier résultat qui ressort de ces analyses est l'existence d'oscillation dans les deux différentes formulations introduites. Nous avons pu déterminer un modèle minimal oscillant, où la circulation est forcée principalement par la température, la salinité apporte une rétroaction positive et la troisième boîte agit comme un délai pour les deux schémas étudiés. Un autre résultat important est la forte dépendance des oscillations à l'amplitude du forçage de salinité. En effet la signature de salinité sur la variabilité et les mécanismes physiques qu'elle entraîne, comme la rétroaction positive sur la circulation, nous laisse penser qu'elle est l'élément principal des oscillations. Le sous-modèle de salinité en traceur actif, qui possède des caractéristiques très proches du système global, nous confirme aussi cette hypothèse. Le dernier résultat fondamental est l'existence d'une bifurcation de Hopf dans tous nos modèles, ce qui entraîne l'existence d'un cycle limite et donc la possibilité d'avoir des oscillations perpétuelles, malgré des schémas qui restent très dissipatifs.

Il faut tout de même souligner que ces résultats restent extrêmement théoriques, étant donné la forme de la formulation, qui est une paramétrisation très idéalisée de la réalité. Ces résultats demandent donc à être confirmés par des modèles plus réalistes comme un modèle bidimensionnel latitude-profondeur (Wright et Stocker, 1991; Schmidt et Mysak, 1996), ou encore un modèle tridimensionnel de circulation océanique. La possibilité d'oscillations perpétuelles nous fait penser à inclure une variabilité saisonnière autour du cycle limite, et de voir l'influence d'un forçage non-stationnaire sur les oscillations induites par le modèle.

Références

- Cessi, P., 1994 : A simple box model of stochastically forced thermohaline flow. *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1911–1920.
- Dijkstra, H. A., 2000 : *Nonlinear Physical Oceanography*. Kluwer Academic Publishers.
- Griffies, S. M. et E. Tziperman, 1995 : A linear thermohaline oscillator driven by stochastic atmospheric forcing. *J. Climate*, **8**, 2440–2453.
- Marotzke, J., 1996 : Analysis of thermohaline feedbacks. In : Decadal climate variability. Dynamics and predictability. *D. L. T. Anderson and J. Willebrand eds., NATO ASI Series, Series I, vol. 44*, 333–378.
- Ruddick, B. et L. Zhang, 1996 : Qualitative behavior and nonoscillation of Stommel’s thermohaline box model. *J. Climate*, **9**, 2768–2777.
- Schmidt, G. A. et L. A. Mysak, 1996 : Identifying a damped oscillatory thermohaline mode in a general circulation model using an adjoint model. *Tellus*, **48**.
- Sirkes, Z. et E. Tziperman, 2001 : Identifying a damped oscillatory thermohaline mode in a general circulation model using an adjoint model. *J. Phys. Oceanogr.*, **31**, 2297–2305.
- Stommel, H., 1961 : Thermohaline convection with stable regimes flow. *Tellus*, **13**, 224–230.
- Tziperman, E. et P. J. Ioannou, 2002 : Transient growth and optimal excitation of thermohaline variability. *J. Phys. Oceanogr.*, **32**, 3427–3435.
- Tziperman, E., et al., 1994 : Instability of the thermohaline circulation with respect to mixed boundary-conditions : Is it really a problem for realistic models ? *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 217–232.
- Wright, D. G. et T. F. Stocker, 1991 : A zonally averaged ocean model for thermohaline circulation. Part I : model development and flow dynamics. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1713–1724.

Annexe 1 : solutions de l'équation cubique du schéma upstream

Les trois solutions de l'équation cubique :

$$u^3 + \frac{b}{1+\epsilon}u^2 + \left[\delta f - \frac{\delta ab}{1+\epsilon}(1-x^*) \right] u + \frac{\delta bf}{1+\epsilon} = 0 \quad (49a)$$

sont :

$$u_1 = \frac{1}{6} \frac{R_2^{\frac{1}{3}}}{1+\epsilon} - \frac{2}{3} R_3 - \frac{1}{3} \frac{b}{1+\epsilon} \quad (49b)$$

$$u_2 = -\frac{1}{12} \frac{R_2^{\frac{1}{3}}}{1+\epsilon} + \frac{1}{3} R_3 - \frac{1}{3} \frac{b}{1+\epsilon} + \frac{i3^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{1}{6} \frac{R_2^{\frac{1}{3}}}{1+\epsilon} + \frac{2}{3} R_3 \right) \quad (49c)$$

$$u_3 = -\frac{1}{12} \frac{R_2^{\frac{1}{3}}}{1+\epsilon} + \frac{1}{3} R_3 - \frac{1}{3} \frac{b}{1+\epsilon} - \frac{i3^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{1}{6} \frac{R_2^{\frac{1}{3}}}{1+\epsilon} + \frac{2}{3} R_3 \right) \quad (49d)$$

avec :

$$\begin{aligned} R_1 = & \delta(4fb + 24\delta f\epsilon + 16\delta f\epsilon + 16\delta^2 f^3\epsilon + 4\delta^2 f^3\epsilon^4 - 4\delta^2 a^3 b^3 \\ & - \delta a^2 b^4 + 8\delta f^2 b^2 + 4\delta^2 f^3 - 12\delta^2 f^2 ab + 16\delta f^2 \epsilon b^2 + 8\delta f^2 \epsilon^2 b^2 + 12\delta^2 f a^2 b^2 \\ & + 20\delta f ab^3 - 4\delta^2 a^3 b^3 \epsilon + 12\delta^2 a^3 b^3 x^* - 12\delta^2 a^3 b^3 x^{*2} + 2\delta a^2 b^4 x^* \\ & + 4\delta^2 a^3 b^3 x^{*3} - \delta a^2 b^4 x^{*2} + 24\delta^2 f a^2 b^2 \epsilon - 24\delta^2 f a^2 b^2 x^* \\ & + 12\delta^2 f a^2 b^2 \epsilon^2 + 20\delta f ab^3 \epsilon + 12\delta^2 f a^2 b^2 x^{*2} - 20\delta f ab^3 x^* \\ & - 36\delta^2 f^2 ab\epsilon + 12\delta^2 f^2 abx^* + 36\delta^2 f^2 abx^* \epsilon - 36\delta^2 f^2 \epsilon^2 ab \\ & + 36\delta^2 f^2 \epsilon^2 abx^* - 12\delta^2 f^2 \epsilon^3 ab + 12\delta^2 f^2 \epsilon^3 abx^* - 48\delta^2 f a^2 b^2 x^* \epsilon \\ & - 24\delta^2 f a^2 b^2 \epsilon^2 x^* + 24\delta^2 f a^2 b^2 x^{*2} \epsilon + 12\delta^2 f a^2 b^2 x^{*2} \epsilon^2 - 20\delta f ab^3 x^* \epsilon \\ & + 12\delta^2 a^3 b^3 x^* \epsilon - 12\delta^2 a^3 b^3 x^{*2} \epsilon + 4\delta^2 a^3 b^3 x^{*3} \epsilon) \end{aligned} \quad (49e)$$

$$\begin{aligned} R_2 = & -72\delta b f - 144b\delta f\epsilon - 72b\delta f\epsilon^2 - 36\delta ab^2 - 36\delta ab^2 \epsilon + 36\delta ab^2 x^* + 36\delta ab^2 x^* \epsilon \\ & - 8b^3 + 12(3R_1)^{\frac{1}{2}} + 12\epsilon(3R_1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (49f)$$

$$R_3 = \frac{3\delta f + 6\delta f\epsilon + 3\delta f\epsilon^2 - 3\delta ab - 3\delta ab\epsilon + 3\delta abx^* + 3\delta abx^* \epsilon - b^2}{(1+\epsilon) R_2^{\frac{1}{3}}} \quad (49g)$$

Annexe 2 : résolution de l'état d'équilibre en schéma centré

$$U(x_3 - x_2) + c(x_3 - x_1) + b(1 - x_1) = 0 \quad (50a)$$

$$\epsilon U(x_1 - x_3) + b(x^* - x_2) = 0 \quad (50b)$$

$$U(x_2 - x_1) + c(x_1 - x_3) = 0 \quad (50c)$$

$$U(y_3 - y_2) + c(y_3 - y_1) + f = 0 \quad (50d)$$

$$U(y_1 - y_3) - f = 0 \quad (50e)$$

$$U(y_2 - y_1) + c(y_1 - y_3) = 0 \quad (50f)$$

On retire de l'équation (50b) que :

$$x_2 = \frac{\epsilon U}{b}(x_1 - x_3) + x^* \quad (51)$$

Cette équation étant réinjectée dans les équations (50a) et (50c) on obtient le système de deux équations à deux inconnues :

$$x_1 \left(\frac{\epsilon U^2}{b} - U + c \right) - x_3 \left(\frac{\epsilon U^2}{b} + c \right) + Ux^* = 0 \quad (52a)$$

$$x_3 \left(\frac{\epsilon U^2}{b} + U + c \right) - x_1 \left(\frac{\epsilon U^2}{b} + c + b \right) - Ux^* + b = 0 \quad (52b)$$

Si on additionne ces deux dernières relations on obtient :

$$x_3 = x_1 \left(1 + \frac{b}{U} \right) - \frac{b}{U} \quad (53)$$

En combinant ce dernier résultat avec l'expression (52a) on arrive à :

$$x_1 = \frac{\epsilon + \frac{bc}{U^2} + x^*}{\epsilon + \frac{bc}{U^2} + 1} \quad (54a)$$

On en déduit les valeurs de x_2 et x_3 par (51) et (53) :

$$x_2 = -\frac{\epsilon + \frac{bc}{U^2} + x^*}{\epsilon + \frac{bc}{U^2} + 1} \epsilon + \epsilon + x^* \quad (54b)$$

$$x_3 = \frac{\epsilon + \frac{bc}{U^2} + x^*}{\epsilon + \frac{bc}{U^2} + 1} \left(1 + \frac{b}{U} \right) - \frac{b}{U} \quad (54c)$$

De la même façon on peut retirer de (50e) :

$$y_3 = y_1 - \frac{f}{U} \quad (55)$$

Ceci étant réinjecté dans (50d) et (50f) on arrive à :

$$U(y_1 - y_2) - \frac{fc}{U} \quad (56a)$$

$$U(y_2 - y_1) + \frac{fc}{U} \quad (56b)$$

Ces deux relations étant équivalentes, on trouve :

$$y_2 = y_1 - \frac{fc}{U^2} \quad (57)$$

Pour résoudre totalement le système on passe par la conservation de la salinité ($y_1 + y_2/\epsilon + y_3(1-\delta)/\delta = 1 + 1/\epsilon + (1-\delta)/\delta$) en y injectant (55) et (57) :

$$y_1 = 1 + \frac{f}{U} \frac{\frac{1-\delta}{\delta} + \frac{c}{\epsilon U}}{1 + \frac{1-\delta}{\delta} + \frac{1}{\epsilon}} \quad (58a)$$

En réutilisant (55) et (57) on trouve :

$$y_2 = 1 + \frac{f}{U} \frac{\frac{1-\delta}{\delta} + \frac{c}{\epsilon U}}{1 + \frac{1-\delta}{\delta} + \frac{1}{\epsilon}} - \frac{fc}{U^2} \quad (58b)$$

$$y_3 = 1 + \frac{f}{U} \frac{\frac{1-\delta}{\delta} + \frac{c}{\epsilon U}}{1 + \frac{1-\delta}{\delta} + \frac{1}{\epsilon}} - \frac{f}{U} \quad (58c)$$

Il suffit maintenant d'écrire les expressions (58a-58c) et (54a-54c) dans la formulation de U :

$$U = a [\delta x_1 - x_2 + (1-\delta) x_3 - \delta y_1 + y_2 - (1-\delta) y_3] \quad (59)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} (\epsilon + 1) U^5 + [bc - ab(1-\delta)(x^* - 1) - f(\epsilon + 1)(1-\delta)] U^3 \\ + [fc(\epsilon + 1) + abc(x^* - 1)] U^2 - fbc(1-\delta) U + fbc^2 = 0 \end{aligned} \quad (60)$$