Stage de recherche, DEA OME

Claire Ménesguen

Avril-Juin, 2004

Redistribution de masse et de vorticité potentielle sur une sphère en rotation : analyse de latitudes singulières

stage réalisé au Laboratoire de Physique des Océans
(IFREMER-CNRS-UBO)
sous la direction de **Richard Schopp**

Table des matières

Introduction

En raison de la sphéricité de la Terre et de la minceur de la couche océanique ou atmosphérique, les études classiques favorisent l'étude du mouvement des masses d'eau océaniques dans un référentiel sphérique. Pourtant, ces mouvements sont principalement régis par la forte rotation terrestre. Le théorème de Taylor-Proudman-Poincaré établit que pour des écoulements lents et stables dûs à une rotation homogène, la vitesse du fluide ne peut pas évoluer le long de l'axe de rotation. En conséquence de quoi, le mouvement des parcelles de fluide apparaît comme le déplacement à hauteur constante (le long de l'axe de rotation) de colonnes de fluide, appelées “colonnes de Taylor”. Ceci amènerait donc naturellement à se placer dans un système de coordonnées cylindriques autour de l'axe de rotation. Le principe de base de cette étude est de revoir la dynamique des masses d'eau dans ce référentiel qui lui paraît plus approprié. Dans un tel référentiel, on se place dans la limite des mouvements océaniques grande échelle et basse fréquence. La conservation de la vorticité potentielle $q = (f + \zeta)/h$ se réduit, comme nous le verrons plus tard à la simple conservation de h, la hauteur parallèle à l'axe de rotation. Cette conservation de la vorticité planétaire pour les mouvements grande échelle va compliquer les redistributions de masse et de vorticité potentielle au sein de l'océan.

Par exemple, dans la région équatoriale cette conservation de h fait apparaître une singularité puisque au passage du cylindre (Γ) tangent au plancher océanique, cette hauteur double (cf figure 1).

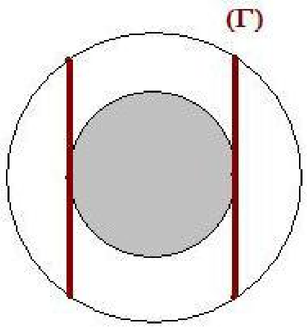

Fig. 1 – Cylindre tangent

Effectivement, sur les coupes océaniques longitudinales, on observe de fortes variabilités de vitesse au niveau de l'équateur. Comme le montre la figure 2, on observe un empilement de sous-courants de directions de vitesses alternées vers l'Ouest (pour les couleurs froides) et vers l'Est (pour les couleurs chaudes). Ces fortes variabilités de vitesse sont contenues dans une région limitée par des vitesses zonales positives dessinant une parabole atteignant 2° au Sud et au Nord de l'équateur. En coordonnées cylindriques, cette parabole devient la tangente au plancher océanique, parallèlement à l'axe de rotation.

La différence des deux dynamiques équatoriale et de moyennes latitudes d'une part et la variation des vitesses, d'autre part, apparaissent clairement sur la carte de données (figure 2) à la frontière des deux zones. Ceci justifie un peu plus l'intérêt de travailler dans un système de coordonnées capable de différencier les deux régions.

Par ailleurs, la conservation de la vorticité potentielle, ce traduisant par une conservation de la hauteur de la colonne de fluide parallèle à l'axe de rotation nous amène à une autre étude située cette fois au niveau des moyennes latitudes. En effet, pour tout réajustement de la surface certaines latitudes singulières apparaissent. Par exemple, une variation de la vitesse zonale (une augmentation

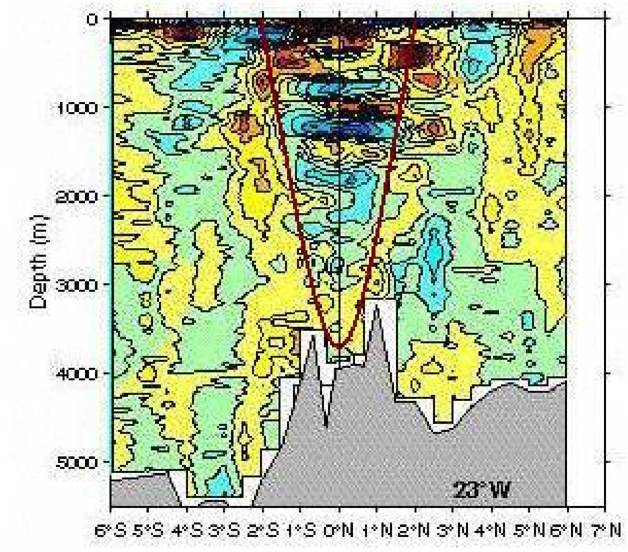

FIG. 2 – Répartition des vitesses de courant sur une coupe longitudinale à 23°W

due à un renforcement du vent) expulse l'eau vers les basses latitudes (à cause de l'augmentation de la force centrifuge), et, parallèlement, la conservation de la masse baisse le niveau d'eau dans les régions polaires. A grande échelle, des convergences et des divergences de fluide aparaissent si la vorticité potentielle est conservée. On représente plus simplement ce phénomène dans un bassin cylindrique en rotation, comme le montre la figure 3.

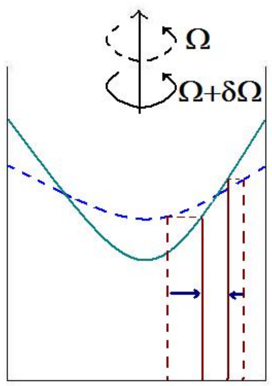

FIG. 3 – Convergences dans le cylindre tournant

De la même manière, sur le géoïde, on retrouvera des latitudes fixes lors d'un ajustement géostrophique qui seraient susceptibles de créer des jets zonaux afin de satisfaire la condition d'incompressibilité du fluide. De plus, ces jets répartiraient la masse par une nouvelle dynamique où on ne peut plus faire les mêmes approximations grande échelle faites dans l'océan quand on négligeait la vorticité relative ζ devant la vorticité planétaire f.

On peut retrouver des latitudes fixes sur le globe où la répartition de masse se fait par de forts jets zonaux : par exemple, sur le front des Açores dans l'Atlantique. Sur la coupe méridienne à 25°W de la figure 4, les densités présentent de fortes pentes pour deux fronts à 35° de latitude au Nord et au Sud.

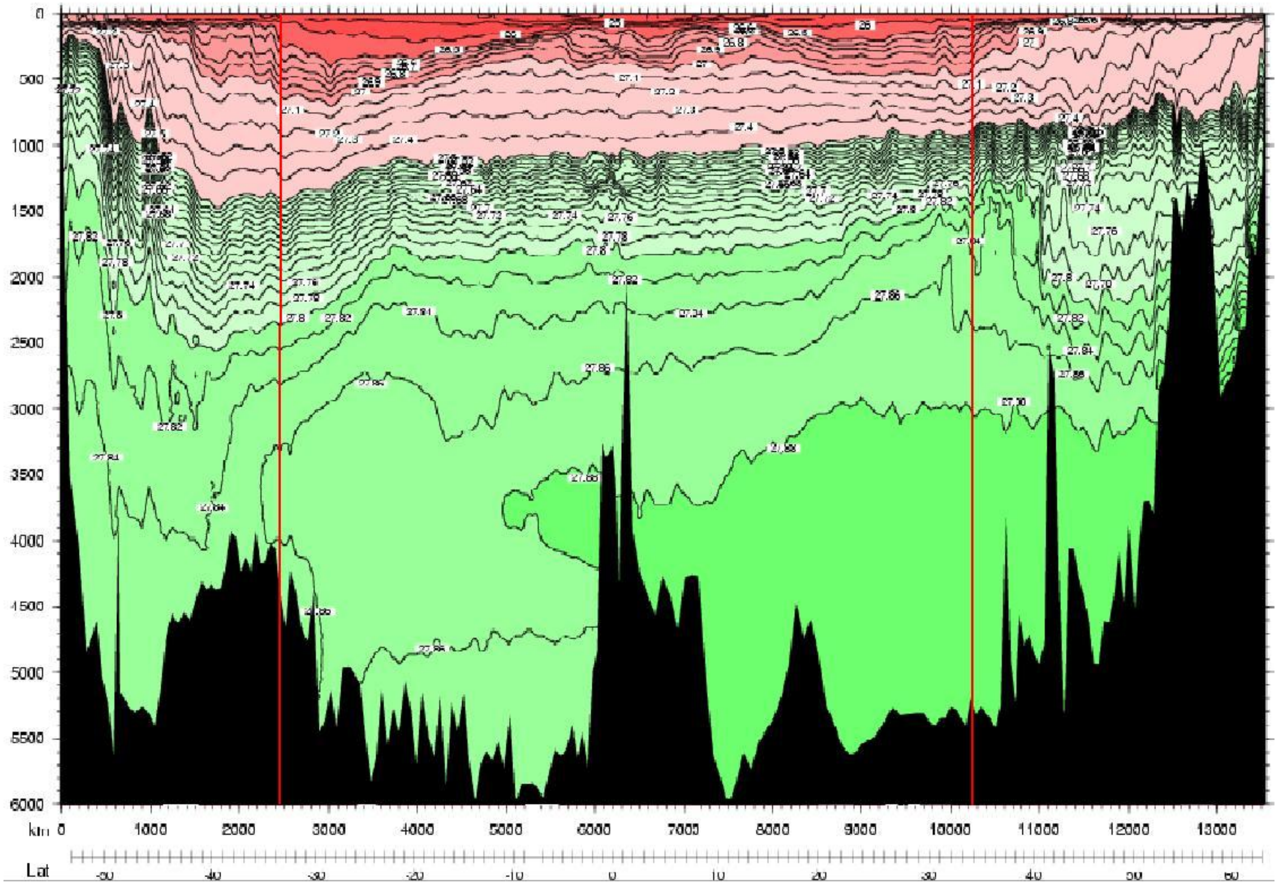

FIG. 4 – Fronts aux moyennes latitudes (à $\pm 35°$)

L'étude suivante va donc se décomposer en deux grandes parties : en premier lieu, l'étude équatoriale où, tout d'abord, en dérivant les équations caractéristiques de la dynamique en coordonnées cylindriques, on va s'intéresser aux continuités et singularités qui apparaissent sur le cylindre tangent (Γ). On tâchera ainsi de faire ressortir dans les équations de la dynamique certaines discontinuités apparaissant dans les cartes de données à ces mêmes latitudes. Puis, cette étude équatoriale va se prolonger, toujours dans le but de rendre compte de (Γ) en suivant une méthode d'homogénéisation de la vorticité potentielle dans les couches océaniques, comme l'ont fait Hide et James (1983). Ensuite, la deuxième partie se focalisera plus sur les moyennes latitudes où, par une approche simple de comparaison avec un bassin cylindrique en rotation, on essayera de faire ressortir certaines propriétés des latitudes singulières signalées plus tôt en les étudiant par le biais d'un ajustement de Rossby.

Première partie
Etude théorique à l'équateur

Dans la dynamique océanique, certains paramètres sont conservés par les particules de fluide au cours de leur déplacement. On retient ici le paramètre de la vorticité potentielle : $q = (\zeta + f)/h$. C'est le rapport de la vorticité totale de la particule (somme de la vorticité relative ζ et de la vorticité planétaire f) sur la hauteur de la colonne d'eau. Dans l'océan, on peut dans les études "grande échelle" négliger la vorticité relative par rapport à la vorticité planétaire, on conserve alors f/h au cours du déplacement d'une particule de fluide. Comme ici notre étude nous amène à considérer un système de coordonnées cylindriques, la vorticité planétaire revient à 2Ω, avec Ω, la vitesse de rotation de la Terre, prise constante et h est la hauteur de la colonne de fluide parallèle à l'axe de rotation. Dans ce cas, la conservation de la vorticité potentielle se traduit beaucoup plus simplement, par la conservation de la hauteur de la colonne de Taylor parallèle à l'axe de rotation de la Terre.

Pour cette étude, on est alors amené à considérer deux zones : la zone que l'on dira de "moyennes latitudes", au Nord de Γ dans l'hémisphère Nord et une bande équatoriale à l'extérieur du cylindre (Γ) tangent au plancher océanique (cf figure 1). Par cette séparation en deux zones, on cherche à mieux rendre compte des différences et singularités apparaissant à l'équateur que dans une étude classique.

Le doublement brutal de la longueur de la colonne et le passage d'une zone où la colonne de fluide s'appuie sur le fond océanique à une autre où les deux extrémités de la colonne sont sur la surface libre vont modifier la dynamique océanique et provoquer des discontinuités non envisageables dans le cas classique, en coordonnées sphériques.

1 Discontinuité des équations caractéristiques pour un modèle bicouche

Afin d'étudier la dynamique au passage des colonnes de Taylor sur le cylindre (Γ), on va dans un premier temps s'intéresser à la dynamique basse fréquence caractérisée par les ondes de Rossby. En simplifiant l'océan à une couche profonde d'eau plus dense et une couche de surface d'eau plus légère, les mouvements océaniques basse fréquence vont engendrer des mouvements de l'interface par la propagation d'ondes. Nous verrons comment les équations caractéristiques du mouvement sont semblables aux moyennes latitudes dans un système de coordonnées cylindriques et pour une étude classique mais aussi comment une nouvelle dynamique apparaît à l'équateur. On s'intéressera de plus à la discontinuité des vitesses de propagation sur le cylindre.

1.1 Cas classique

Classiquement, l'étude des ondes se fait en coordonnées sphériques. On pourra d'ailleurs se référer à Pedlosky (1996) pour retrouver cette première approche. Etant donné la minceur de la couche de fluide par rapport au rayon terrestre, on ne retient que les mouvements horizontaux sur lesquels seule la composante verticale de la rotation de la Terre influe.

Cette approximation de "couche mince" est largement répandue dans l'étude grande échelle de l'océan ou de l'atmosphère terrestre. Elle nous amène en particulier à considérer la pression comme hydrostatique.

Dans l'étude qui nous concerne, on prendra le modèle bicouche de la figure 5.

Les mouvements du fluide obéissent aux **équations du mouvement** suivantes :

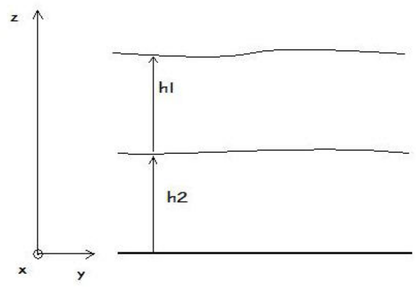

FIG. 5 – Modèle bicouche

$$-fv_i = -\frac{1}{\rho_0} p_{i_x} \tag{1a}$$

$$fu_i = -\frac{1}{\rho_0} p_{i_y} \tag{1b}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} p_{i_z} - g \tag{1c}$$

Où $f = 2\Omega \sin(latitude)$ est le paramètre de Coriolis, u, la vitesse zonale, v, la vitesse méridionale, l'indice $_i$, indiquant la couche de fluide, ρ_0, la valeur moyenne de la densité in situ ρ (d'après l'approximation de Boussinesq), p, la pression et g, la gravité.

De plus, il faut considérer **la conservation de la masse :**

$$D_t h_i + h_i \nabla u_i = 0 \tag{2}$$

Avec h_i la hauteur de la couche i suivant la verticale.

Comme l'ont fait Colin de Verdière et Schopp (1994), on fera ici différentes approximations. Tout d'abord, on reste dans la limite des mouvements aux basses fréquences : le nombre de Rossby temporel ($Ro_T = 1/Tf$, avec T la période du phénomène observé) reste petit devant le nombre d'aspect $\delta = L/H$ (où L et H sont respectivement les longueurs caractéristiques horizontale et verticale). On se place également à petit nombre de Rossby ($Ro = U/fL$, avec U la vitesse caractéristique de l'écoulement). De cette façon, les termes d'advection sont négligés devant les termes de Coriolis. De plus, on suppose la viscosité négligeable : le nombre d'Ekman $E = \nu/\Omega H^2$ reste petit (avec ν le coefficient de viscosité dynamique du fluide). On arrive ainsi à l'équilibre géostrophique.

Le théorème de Taylor-Proudman cité plus haut impose au fluide d'avoir un champ de vitesse invariant suivant la direction de l'axe de rotation. En sachant que l'approximation "couche mince" projette les équations suivant l'axe de rotation sur l'axe vertical, cette propriété d'invariance devrait se retrouver sur la verticale. Or, si l'invariance du champ de vitesse horizontal est bien respectée, il n'en est pas de même de la vitesse verticale. En effet, du fait de la variation de la composante verticale de la rotation, les vitesses horizontales ont une divergence horizontale non nulle de $-\beta v_i/f$, où $\beta = 2\Omega \cos(latitude)/R_{Terre}$ qui mène à **la relation de Sverdrup :**

$$\beta v_i = f \partial_z w_i \tag{3}$$

et, par une intégration sur la verticale de l'équation (3), à l'**équation du transport net :**

$$V_B = \frac{f w_E}{\beta}, \tag{4}$$

avec

$$V_B = h_1 v_1 + h_2 v_2. \tag{5}$$

w_E est le pompage d'Ekman en surface.

Dans la relation (3), du fait de la convergence d'Ekman sub-tropicale, on obtient une vitesse méridienne vers l'équateur. C'est alors que le théorème de Taylor-Proudman semble non respecté : on étire une colonne de fluide tout en conservant la géostrophie. La singularité qui apparaît ici peut prendre de l'importance à l'équateur. D'ailleurs, Veronis (1963) et Colin de Verdière et Schopp (1994) ont montré que l'approximation négligeant la composante horizontale de la rotation est valable uniquement dans la limite où les échelles typiques horizontales du mouvement ne passent pas en dessous de $\sqrt{HR_{Terre}}$ dans une région centrée sur l'équateur. C'est à dire, dans une bande de l'ordre de 160km de large autour de l'équateur.

Des équations (1a), (1b), (1c) et (2), on déduit **l'équation de propagation des ondes :**

$$\partial_t h_2 + (u_B - \frac{g'\beta}{f^2}\frac{h_1 h_2}{h})\partial_x h_2 - \frac{v_B}{f} h_2^2 \partial_y (\frac{f}{h_2}) = 0 \tag{6}$$

$u_B = (h_1 u_1 + h_2 u_2)/h$ est la vitesse du courant "barotrope" associé.

On notera :

$$c_{R_{cl}} = -\frac{g'\beta}{f^2}\frac{h_1 h_2}{h}, \tag{7}$$

la vitesse de propagation des ondes associées.

On remarquera d'abord, dans cette équation, l'advection des ondes par le courant "barotrope". Cette advection est modifiée latitudinalement par une propagation vers l'ouest de l'onde de Rossby. Son amplitude est fonction d'un rapport des hauteurs de couches ainsi que de la gravité réduite. Mais surtout, elle est fonction de β : c'est la variation de f qui permet la propagation.

1.2 Equations en coordonnées cylindriques

Le référentiel cylindrique dans lequel on va maintenant se placer va nous permettre de prendre en compte la rotation terrestre totale. En particulier, on retiendra sa composante horizontale négligée dans les études en coordonnées sphériques. Le système de coordonnées cylindriques utilisé par la suite est illsutré sur la figure 6.

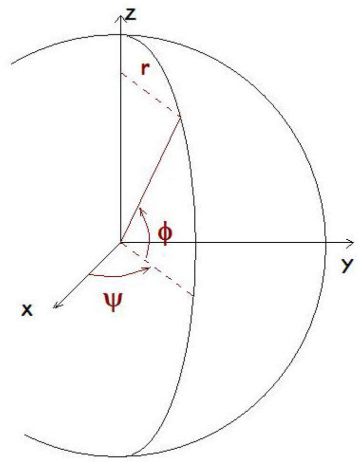

Fig. 6 – Système de coordonnées cylindriques

Les équations de base (toujours pour un modèle bicouche) sont les mêmes, exprimées en coordonnées cylindriques :

-Les équations du mouvement :

$$2\Omega v_i = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r}\partial_\psi p_i \tag{8a}$$

$$-2\Omega u_i = -\frac{1}{\rho_0}\partial_r p_i - \frac{\rho}{\rho_0} g\cos\phi_i \tag{8b}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\partial_z p_i - \frac{\rho}{\rho_0} g\sin\phi_i \tag{8c}$$

-La conservation de la masse :

$$D_t h_i + h_i \nabla u_i = 0 \tag{9}$$

On notera que les mêmes approximations exposées dans le paragraphe précédent sont faites. On se place dans un domaine où les paramètres sont tels que les nombres de Rossby temporel, de Rossby et d'Ekman restent petits devant le nombre d'aspect δ.

De la géostrophie, on déduit d'abord **les expressions des vitesses :**

$$u_1 = \frac{g}{2\Omega}\sin\phi_T(\partial r h_T + \cot\phi_T) \tag{10a}$$

$$v_1 = -\frac{g}{2\Omega}\sin\phi_T \frac{1}{r}\partial\psi h_T \tag{10b}$$

$$u_2 = u_1 + \frac{g'}{2\Omega}\sin\phi_I(\partial r h_I + \cot\phi_I) \tag{10c}$$

$$v_2 = v_1 - \frac{g'}{2\Omega}\sin\phi_I \frac{1}{r}\partial\psi h_I \tag{10d}$$

$$w_2 = w_1 + \frac{g'}{2\Omega}\cos\phi_I \frac{1}{r}\partial\psi h_I \tag{10e}$$

$*_T$ et $*_I$ sont les indices respectifs pour la surface libre et à l'interface. ϕ est la latitude du point considéré, Q désigne un forçage, h la hauteur de la colonne d'eau, et Z, la côte de la sphère de référence. g' est la gravité réduite. Les notations de hauteurs sont : h_1 et h_2 pour les hauteurs des couches (1) et (2), h pour la hauteur totale et h_I pour la hauteur de l'interface depuis l'équateur (cf illustration sur la figure 7).

Puis, la conservation de la vorticité potentielle se traduit dans le cas présent par la conservation de la hauteur de la colonne de Taylor. A partir de cet endroit, on est obliger de considérer deux cas : les expressions des hauteurs ne sont pas les mêmes suivant qu'on se place dans la région équatoriale ou pour les moyennes latitudes.

•*Pour les moyennes latitudes*

Tout d'abord, pour les moyennes latitudes, la conservation de la vorticité potentielle donne les relations, respectivement pour les couches de surface et de fond, suivantes :

$$-\partial_t h_T - \frac{Q_T}{\sin\phi_T} + \partial_t h_I = u_1 \frac{1}{r}\partial_\psi(Z_T - h_I) + v_1\partial_r(Z_T - h_I) \tag{11a}$$

$$-\partial_t h_I = u_2 \frac{1}{r}\partial_\psi(h_I - Z_B) + v_2\partial_r(h_I - Z_B) \tag{11b}$$

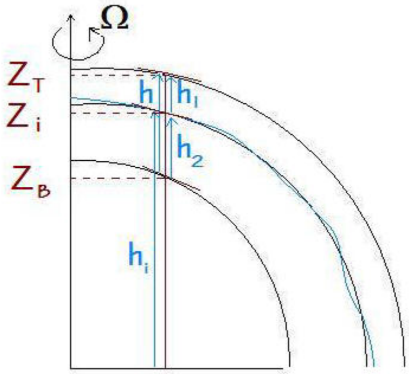

FIG. 7 – Notations des différentes hauteurs

On note ici le terme $-\partial_t h_T$ qui traduit la variation temporelle de la hauteur de surface. Pour la suite, pour plus de clarté dans les différentes équations, on fera l'hypothèse de "toit rigide", où, justement, on néglige ce terme.

La somme des équations (11a) et (11b) permet d'accéder aux **équations du transport net :**

$$V_B = -h_2 v_2 \frac{h}{Z_B} - \frac{h_I}{\cos\phi_T} Q_T - \frac{h_I}{\cos\phi_T} \partial_t h_T \tag{12}$$

Ici, le forçage est pris comme la vitesse sortante, perpendiculaire à la surface considérée : $Q = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal sortant à la surface. Plus précisément, l'expression de Q est donnée par :

$$Q = \frac{u r^{-1} \partial_\psi h + v \partial_r h - w}{\sqrt{(r^{-1}\partial_\psi h)^2 + (\partial_r h)^2 + 1}} \tag{13}$$

Dans une étude classique, le transport net (4) dépend uniquement du forçage en surface : w_E. Mais ici, le transport net dépend également d'un terme en $h_2 v_2$ qui vient coupler les modes barocline et barotrope. En effet, le transport net n'est plus exclusivement barotrope dès qu'il ne représente plus (comme dans le cas classique) un transport perpendiculaire aux isopycnes. En d'autre termes, ce couplage traduit aussi la variation de l'effet β suivant l'axe de rotation.

Pour comprendre l'effet du couplage, on supprime le forçage en surface dans l'équation (12) :

$$h_1 v_1 + \frac{Z_T}{Z_B} h_2 v_2 = 0 \tag{14}$$

On voit mieux ainsi aux moyennes latitudes que, quand Z_T tend vers Z_B, les transports méridiens sont exactement opposés dans les deux couches comme l'illustre la figure 8. Ici, les isopycnes sont encore quasiment perpendiculaires au transport net. On est dans le cas où $V_B = 0$ implique un mode purement barocline. Mais, en se rapprochant de l'équateur, Z_B diminue, on tend alors à augmenter le transport de la couche supérieure par rapport au transport de la couche inférieure. On ne peut plus dire que les transports méridiens sont exactement opposés. On n'est donc plus dans un mode purement barocline, mais dans une combinaison des deux modes. Dans ce repère en coordonnées cylindriques, on ne peut donc plus séparer les deux modes dans des études indépendantes dès qu'on se rapproche de l'équateur.

Une autre combinaison linéaire des équations (11a) et (11b) permet d'accéder à l'**équations de la dynamique** pour les moyennes latitudes :

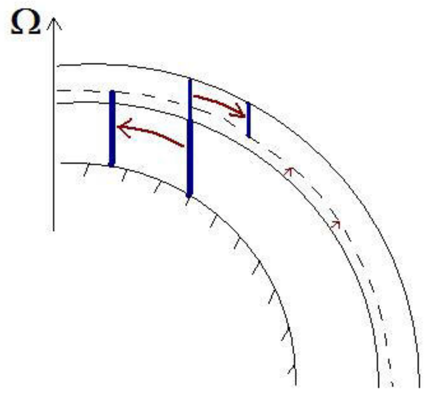

FIG. 8 – Transports aux moyennes latitudes

$$\frac{\partial h_I}{\partial t} + (u_B + \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1 h_2}{hh_I}\sin\phi_I\frac{\partial\ h_I}{\partial r})\frac{1}{r}\frac{\partial\ h_I}{\partial\psi} = (r + Z_B\frac{\partial\ h_I}{\partial r})\frac{Q_T}{\cos\phi_T} \tag{15}$$

On note :

$$c_{R_{ml}} = \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1 h_2}{hh_I}\sin\phi_I\frac{\partial\ h_I}{\partial r}, \tag{16}$$

la vitesse de propagation des ondes aux moyennes latitudes.

Elle est ici exprimée en fonction de la pente de l'interface mais, il peut être plus parlant de la voir en terme de cisaillement $(u_2 - u_1)$ entre les deux couches. Pour ce faire, on utilise la relation (10c). Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial h_I}{\partial t} + (u_B + (u_2 - u_1)\frac{h_1 h_2}{hh_I} - \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1 h_2}{hh_I}\cos\phi_I)\frac{1}{r}\frac{\partial\ h_I}{\partial\psi} = (r + Z_B\frac{\partial\ h_I}{\partial r})\frac{Q_T}{\cos\phi_T} \tag{17}$$

avec :

$$c_{R_{ml}} = (u_2 - u_1)_{ml}\frac{h_1 h_2}{hh_I} - \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1 h_2}{hh_I}\cos\phi_I. \tag{18}$$

On peut noter que le terme $-g'/2\Omega \cdot h_1 h_2/hh_I \cdot \cos\phi_I$ de $c_{R_{ml}}$ est le même que $c_{R_{cl}}$ (7) quand on projette les hauteurs suivant la verticale. L'autre terme qui vient se rajouter dans $c_{R_{ml}}$ par rapport au cas sphérique est donc un terme dû au cisaillement de vitesse $(u_2 - u_1)_{ml}$ entre les deux couches

•*à l'équateur*

Il faut maintenant repartir de la conservation de la vorticité potentielle pour retrouver à nouveau le raisonnement arrivant à l'équation caractéristique de la dynamique à l'équateur. Dans cette région, on passe à un système trois couches, sans plancher océanique. Pour l'étude ci-après, on prendra un forçage symétrique de part et d'autre de l'équateur. Ceci nous permet de prendre pour origine des hauteurs, l'équateur, et de ne prendre en compte qu'un hémisphère. Les équations de conservation de la vorticité potentielle sont alors :

$$-\partial_t h_T - \frac{Q_T}{\sin\phi_T} + \partial_t h_I = u_1\frac{1}{r}\partial_\psi(Z_T - h_I) + v_1\partial_r(Z_T - h_I) \tag{19a}$$

$$-\partial_t h_I = u_2\frac{1}{r}\partial_\psi h_I + v_2\partial_r h_I \tag{19b}$$

De la même manière, la somme de ces deux équations (19a) et (19b) donne le demi **transport net** équatorial :

$$V_B = h_1 \frac{g'}{2\Omega}(\sin\phi_I + \frac{Z_T}{r}\cos\phi_I)\frac{1}{r}\partial_\psi h_I + \frac{Z_T Q_T}{\cos\phi_T} + Z_T \tan\phi_T \partial_t h_T \tag{20}$$

Du fait de la dynamique trois couches de l'équateur, cette relation n'est plus du tout comparable à celle obtenue dans le cas classique.

Puis, toujours par une combinaison linéaire de (19a) et (19b), on obtient les **équations de la dynamique** pour la région équatoriale :

$$\frac{\partial h_I}{\partial t} + (u_B + \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1}{h}\cos\phi_I[1 + (\tan\phi_I + \tan\phi_T)\frac{\partial h_I}{\partial r}])\frac{1}{r}\frac{\partial\ h_I}{\partial\psi} = -\frac{Z_T}{h}\frac{\partial\ h_I}{\partial r}\frac{Q_T}{\cos\phi_T} \tag{21}$$

avec la vitesse de propagation :

$$c_{R_e} = \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1}{h}\cos\phi_I[1 + (\tan\phi_I + \tan\phi_T)(\frac{\partial h_I}{\partial r})_e] \tag{22}$$

ou, si en réécrivant (21) en fonction des vitesses dans les deux couches :

$$\frac{\partial h_I}{\partial t} + (u_B + (u_2 - u_1)\frac{h_1}{h}[1 + \cot\phi_I \tan\phi_T] - \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1}{h}\frac{\tan\phi_T}{\sin\phi_I})\frac{1}{r}\frac{\partial\ h_I}{\partial\psi} = -\frac{Z_T}{h}\frac{\partial\ h_I}{\partial r}\frac{Q_T}{\cos\phi_T} \tag{23}$$

et la vitesse de propagation :

$$c_{R_e} = (u_2 - u_1)_e \frac{h_1}{h}[1 + \cot\phi_I \tan\phi_T] - \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1}{h}\frac{\tan\phi_T}{\sin\phi_I} \tag{24}$$

On pourrait prendre en compte un flux trans-isopycnal q_I entre les deux couches. Il se rajouterait sur les forçages des équations caractéristiques avec :

$$q_I = -\frac{Q_I}{\sin\phi_I}\sqrt{[(v_2 - v_1)^2 + (u_2 - u_1)^2](\frac{2\Omega}{g'})^2 - (u_2 - u_1)(\frac{2\Omega}{g'})\sin 2\phi_I + 1} \tag{25}$$

Mais ce flux se résumerait à : $q_I = Q_I/\sin\phi_I$ dès que $2\Omega/g' << 1(m/s)^{-1}$ dans la mesure où $(u_2 - u_1) \sim 1m/s$.

Discussion

- Les équations de propagation des deux zones ne sont, a priori, pas continues à la frontière, en (Γ). Par exemple, les termes de cisaillement présentent un saut de : $(u_2 - u_1)h_1/h_2$. On verra cependant dans la partie suivante comment les différentes discontinuités pourraient se compenser pour assurer la continuité de la vitesse de propagation des ondes.
- Un autre point à noter : les ondes aux moyennes latitudes sont advectées par le courant barotrope ($c_{R_{ml}} = 0$) quand : $2\Omega\rho_0(u_2 - u_1) = g(\rho_2 - \rho_1)\cos\phi_I$, c'est-à-dire quand le couple des forces de Coriolis compense exactement le couple de gravité. Ceci se traduit également par une pente de l'interface horizontale : le fluide dense tend à être expulsé vers l'extérieur de la sphère. Dans la région équatoriale, ceci n'est plus vrai : la pente de l'interface nécessaire à une telle onde est $-r/(h_1 + 2h_2)$. Ces conditions sont illustrées sur la figure 9.
- En réécrivant (15) de façon à ne faire intervenir plus que la couche 2, on peut faire une interprétation simple de cette équation de propagation aux moyennes latitudes. En effet, l'équation (15), en relachant l'hypothése de "toit rigide", se réécrit sous la forme :

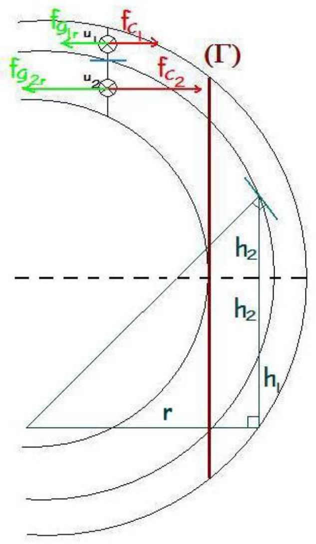

FIG. 9 – Conditions d'advection des ondes par le courant barotrope

$$h\partial_t h_I + (hu_2 - \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1 Z_B}{h_I}\sin\phi_I \partial_r h_2)\frac{1}{r}\partial_\psi h_I = \partial_r h_2(\frac{Z_B}{\cos\phi_T}Q_T + \frac{Z_B Z_T}{r}\partial_t h_T) \qquad (26)$$

Dans cette formulation, la propagation des ondes est directement liée au gradient méridien de h_2, c'est à dire au gradient méridien de la vorticité potentielle.

On remarque que, sans aucune hypothèse de forçage nul en surface ni même de toit rigide, l'onde devient de la pure advection par le courant de la couche profonde suivant l'équation (27) dès que la hauteur h_2 ne dépend plus de r, dès que le gradient méridien de vorticité potentielle est nul.

$$\partial_t h_I + u_2 \frac{1}{r}\partial_\psi h_I = 0 \qquad (27)$$

Autrement dit, la dynamique de l'onde ne dépend plus que de la couche 2, dès qu'une colonne de Taylor de la couche 2 peut se déplacer latitudinalement sans faire varier sa hauteur (cf figure 10).

1.3 Conditions de continuité des vitesses de propagation

En premier abord, les vitesses de propagation dans les différentes régions ne présentent pas de continuité évidentes :

•*pour la région des moyennes latitudes :*

$$c_{R_{ml}} = (u_2 - u_1)_{ml}\frac{h_1 h_2}{hh_I} - \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1 h_2}{hh_I}\cos\phi_I \qquad (28)$$

•*pour la région équatoriale entre (Γ) et le cylindre (Γ') tangent à l'interface (cf figure 9) :*

$$c_{R_e} = (u_2 - u_1)_e \frac{h_1}{h}[1 + \cot\phi_I \tan\phi_T] - \frac{g'}{2\Omega}\frac{h_1}{h}\frac{\tan\phi_T}{\sin\phi_I} \qquad (29)$$

•*pour la région externe à (Γ') :*

$$(c_R - u_B)_{e'} = 0 \qquad (30)$$

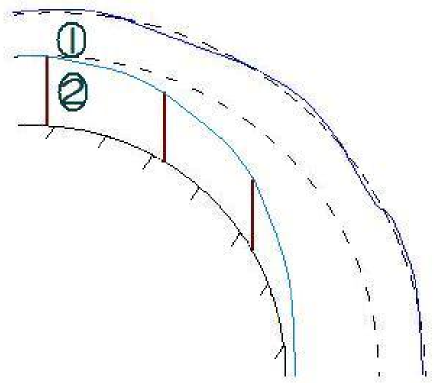

FIG. 10 – Interprétation graphique aux moyennes latitudes

Dans un premier temps, comme l'ont fait Schopp et Colin de Verdière (1997), on peut visualiser, sur la figure 11, les discontinuités de c_R qui apparaissent au niveau des deux cylindres : (Γ) à $2°$ de latitude en surface et (Γ') à environ $1,6°$ de latitude en surface. Cette figure est faite dans le cas linéaire où n'apparaît pas le cisaillement des vitesses.

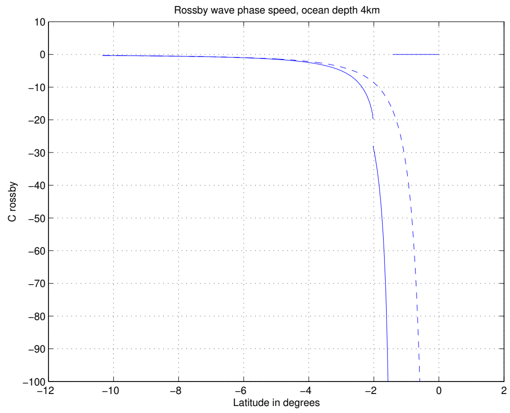

FIG. 11 – Discontinuités de la vitesse de propagation des ondes linéaires

Il est alors intéressant de rechercher si les deux expressions de la vitesse de propagation autour de (Γ) peuvent se raccorder pour certaines évaluations de leurs différents termes. Ainsi, pour une couche superficielle de $100m$ de profondeur, une couche inférieure de $3900m$ de profondeur, une anomalie de densité de $1*10^{-3}\rho_0$ et en supposant la continuité du cisaillement -c'est à dire $(u_2-u_1)_e = (u_2-u_1)_{ml}$, on obtiendrait $u_2 - u_1 = 1m/s$-. Ici, la couche inférieure serait donc plus rapide que la couche supérieure.

Si on suppose maintenant une discontinuité de cisaillement possible, il faut fixer des valeurs supplémentaires. On peut poser $u_{1_{ml}} = 1m/s$, $u_{2_{ml}} = 0m/s$, $u_{1_e} = 1m/s$. La continuité de $c_R - u_B$ suppose alors une vitesse u_{2_e} de $0.97m/s$. La couche du fond est maintenant au repos dans les moyennes latitudes et avec une vitesse inférieure à celle de la couche superficielle dans la région équatoriale, ce qui paraît plus plausible.

Cette approche numérique peut être reprise sur un mode plus théorique. En effet, en reprenant les équations de propagation (15) et (21) ou (17) et (23), on peut déduire des conditions sur les pentes de l'interface ou sur le cisaillement pour que c_R soit continue en (Γ). Si on s'attache aux pentes de l'interface (on pourrait faire le travail équivalent sur le cisaillement), on trouve la condition de continuité en (Γ) pour la vitesse de propagation des ondes qui est :

(15) = (21) $\Rightarrow$

$$h_2((\frac{\partial\ h_I}{\partial r})_{ml} - (\frac{\partial\ h_I}{\partial r})_e) = h(\frac{\partial\ h_I}{\partial r})_e + R, \tag{31}$$

avec R, le rayon de la Terre.

Remarques :

•Une vérification élémentaire est de substituer les conditions de "stationnarité" où $c_{R_{ml}} = c_{R_e} = 0$ dans ces équations. Ces ondes à vitesse de propagation continue doivent en effet être solutions de (31).

•La relation (31) montre de plus que la continuité des vitesses de propagation en (Γ) implique à priori un saut de pente de l'interface à 2° de latitude. On peut d'ailleurs voir une discontinuité de ces pentes sur certaines cartes de données, comme le montre la figure 12. Sur cette figure le cylindre (Γ) est tracé en noir et, on retrouve sur ce tracé des discontinuités des pentes de l'interface ici repérée par un fort gradient de densité.

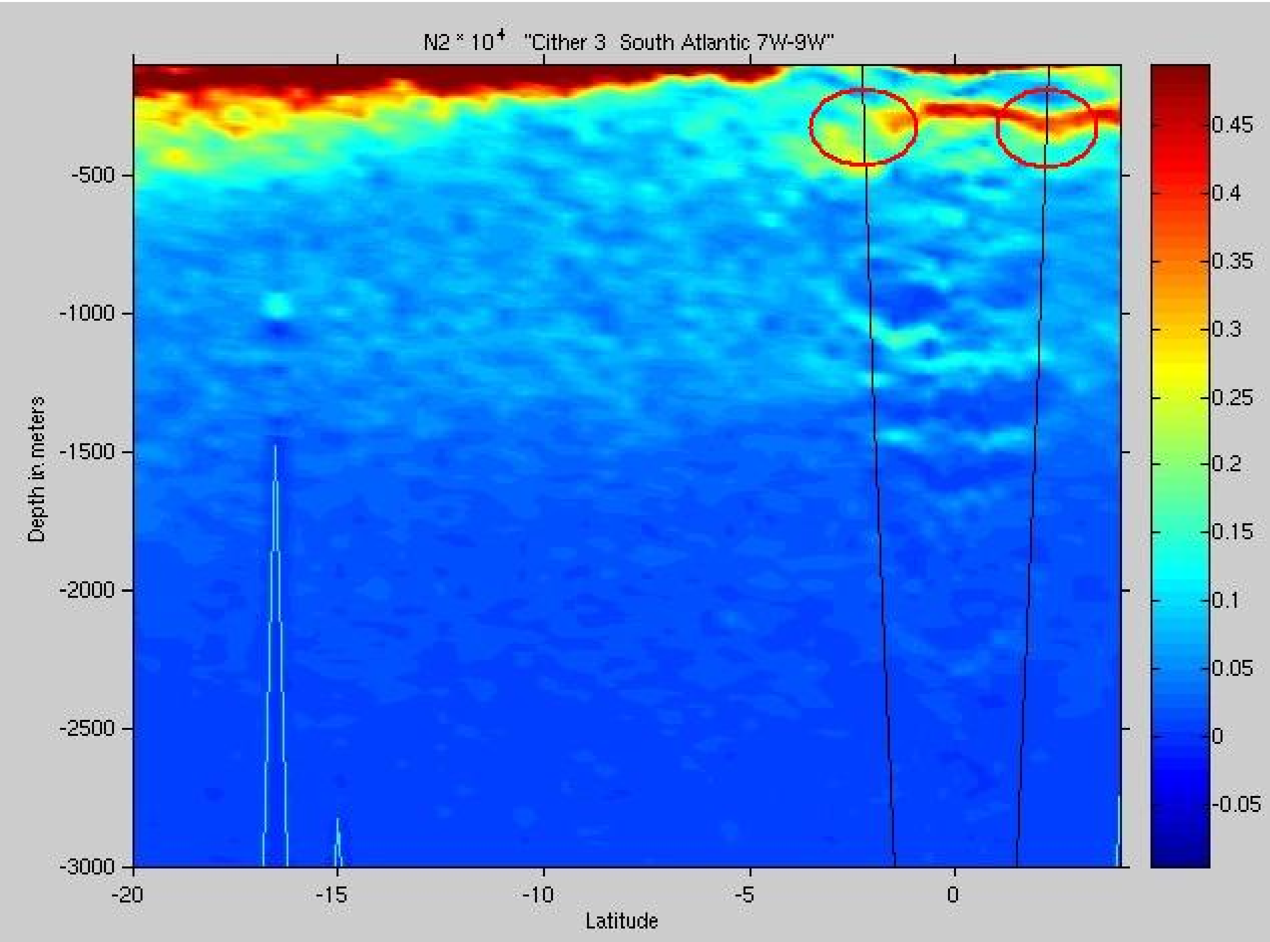

FIG. 12 – Discontinuités des pentes de l'interface

Cette partie a donc permis, dans la suite de l'étude linéaire dans un système de coordonnées cylindriques faite par Colin de Verdière et Schopp (1994), de rendre compte de certaines discontinuités en (Γ). En particulier, elle a fait intervenir des vitesses de cisaillement qui, par un ajustement spécifique permettraient aux ondes de se propager en (Γ) sans discontinuités de vitesses c_R. Ceci impliquerait d'autre part une discontinuité de pente de l'interface en (Γ). Or, les observations confirment à la fois la discontinuité du champ de vitesse dans les couches, et à la fois la discontinuité de la pente de l'interface. Le cas particulier de la continuité de c_R au passage du cylindre nous a permis d'appréhender ces régions de façon analytique. Même si elle n'est pas vérifiée, elle semblerait appuyer l'approche d'une dynamique décrite par les équations du mouvement en coordonnées cylindriques.

2 Homogénéisation de la vorticité potentielle

Nous abordons ici une autre approche de la dynamique océanique qui cherche à rendre compte du cylindre (Γ) en partant d'un point de vue différent. Après la première étude sur les équations caractéristiques où la conservation de la vorticité potentielle s'effectuait au travers l'ajustement de la hauteur de l'interface, on passe ici dans une configuration où, en plus, on permet l'évolution de la vorticité relative. D'une dynamique à $2\Omega/h$ constant, on passe à une dynamique à $(2\Omega+\zeta)/h$ contant. On permet alors au mouvement relatif moyenne échelle de se développer. Dans un souci de simplification, on prendra dans ce modèle une vorticité potentielle homogénéisée dans chaque couche (cf figure 13). Notons que l'océan est le lieu de nombreux mélanges et que la vorticité potentielle a de ce fait tendance à s'homogénéiser.

2.1 Position du problème

En se plaçant encore dans un fluide en rotation rapide autour d'un axe, on ne quitte pas la dynamique des colonnes de Taylor. Dans un système unicouche, Hide et James (1983) trouvent que la forme du profil de la variation latitudinale du courant zonal moyen dépend de plusieurs paramètres comme l'épaisseur de la couche. Mais, quoi qu'il en soit, ces profils montrent tous de forts jets soit à l'équateur dans le cas d'une couche mince, soit aux moyennes latitudes pour des couches plus épaisses. Le modèle simple dont sont tirées ces conclusions permet déjà de les rapprocher aux observations de jets, par exemple dans les atmosphères de la Terre, de Jupiter, et de Saturne : leurs atmosphères épaisses présentent de forts jets zonaux plus ou moins écartés de l'équateur.

Cependant, l'étude ici se veut appliquée au problème océanique. Dans ce sens, en repartant de la même approche que Hide et James (1983), on va considérer un système de deux couches. En reprenant leur méthode de calcul, on homogénéise méridionalement la vorticité potentielle $\overline{q_i}$ de chaque couche.

On posera $\Omega_i(r)$ les vitesses angulaires telles que les vitesses totales : $u_{i_T} = \Omega_i(r)\cdot r$. L'équation de conservation de la vorticité potentielle s'écrit alors : $1/r \cdot \partial_r(r u_{i_T}) = \overline{q_i} h_i$.

Or, en reprenant les vitesses relatives géostrophiques (10a) et (10c), on arrive à : $u_{2_T} - u_{1_T} = \Omega_0 r + u_{2_{rel}} - (\Omega_0 r + u_{1_{rel}})$.

Ceci mène au système suivant :

$$2\Omega_i + r\partial_r\Omega_i = \overline{q_i}h_i \tag{32a}$$

$$(\Omega_2 - \Omega_1)r = \frac{g'}{2\Omega_0}\sin\phi_I(\partial r h_I + \cot\phi_I) \tag{32b}$$

$$h_2 = h_I - Z_B \tag{32c}$$

$$h_1 = Z_T - h_I \tag{32d}$$

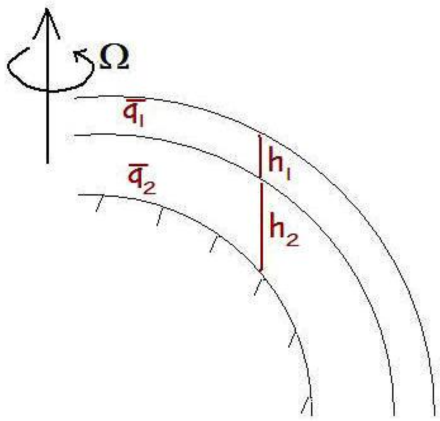

FIG. 13 – Homogénéisation de la vorticité potentielle

2.2 Résolution

La résolution de ce système nous amène, pour les moyennes latitudes, à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{g'}{2\Omega_0}\sin\phi_I\partial^2_{r,r}h_I+\frac{g'}{2\Omega_0}(\frac{1}{r}\sin\phi_I-\frac{1}{Z_I}\sin\phi_I\cos\phi_I)\partial_r h_I-(\overline{q_2}+\overline{q_1})h_I\\&\quad=-\frac{g'}{2\Omega_0}(\frac{1}{r}\cos\phi_I-\frac{1}{Z_I}\sin^3\phi_I)-\overline{q_2}Z_B-\overline{q_1}Z_T\end{aligned}\tag{33}$$

On peut obtenir une équation similaire pour la région équatoriale : en se plaçant comme précédemment dans le cas d'une configuration symétrique par rapport à l'équateur, il suffit de remplacer Z_B par 0.

Cette équation (33) étant non-linéaire et sans solution analytique, on peut la résoudre numériquement, par exemple par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Mais, les singularités de l'équateur amènent des zéros dans l'équation et compliquent la résolution numérique. La résolution est en cours mais n'a pour l'instant pas donné de résultats.

Deuxième partie

Etude théorique aux moyennes latitudes

Dans la partie suivante, on quitte l'équateur pour s'intéresser plus à la répartition de masse aux moyennes latitudes, là où la figure 4 présente des fronts de densité latitudinaux.

On a vu plus haut que la conservation de vorticité potentielle au sein des océans pour les phénomènes grande échelle se traduisait par la conservation de la hauteur des colonnes de Taylor parallèles à l'axe de rotation. Le problème ici sera d'étudier la répartition de masse qui advient quand après relaxation d'une contrainte, la surface libre se réajuste sur un équilibre géostrophique. A cause de la conservation de la masse, les deux surfaces libres initiale et finale vont s'intersecter à une certaine latitude λ_0 pour des problèmes axisymétriques.

Une première approche consiste à travailler plutôt dans un bassin cylindrique : les résolutions sont plus simples que sur le géoïde mais en conservent la physique. En effet, les forces qui s'appliquent sur le fluide sont identiques. Le raisonnement présenté plus haut est alors beaucoup plus facilement concevable sur le schéma 3. En fait de réajustement de la surface libre, on se place ici dans le cas d'un changement de la vitesse de rotation. On représente sur le schéma 3, en plus de l'intersection des deux surfaces, le déplacement des colonnes de Taylor si, comme dans le cas océanique stratifié pris en compte plus haut, elles doivent conserver leur hauteur. On s'apperçoit alors facilement que la zone de latitude λ_0 sera une zone de convergence des colonnes de Taylor et l'incompressibilité du fluide va engendrer une nouvelle répartition de masse. Le but de cette partie est de voir si on peut retrouver des jets zonaux à ces latitudes, simplement par une approche géostrophique.

3 Points fixes et affleurements

Notre première approche est donc située dans un bassin cylindrique en rotation autour de son axe de symétrie. Si, ensuite, on veut comparer la dynamique dans ce bassin avec celle sur la Terre, il faut comparer la surface libre de la rotation solide avec le géoïde, le pôle avec le centre du bassin et l'équateur (qui est le plus éloigné de l'axe de rotation) avec les bords latéraux du bassin cylindrique.

3.1 Cas du bassin cylindrique

Avant d'étudier un ajustement du fluide après relaxation d'une contrainte, rappelons ici quels sont les états d'équilibre libres pour un fluide homogène puis pour un système bicouche.

-fluide homogène

En rotation solide, les forces en équilibre sont les forces de pression, la gravité et la force centrifuge. On note H_0 la hauteur initiale. En conservant la masse, on obtient alors, pour la surface libre d'un fluide en rotation solide dans un bassin cylindrique, un paraboloïde :

$$h_0(r) = H_0 + \frac{\Omega_0^2}{2g}(r^2 - \frac{L^2}{2}) \quad (34)$$

Les notations de cette équation sont explicitées sur la figure 14.

On constate que, quelle que soit la valeur de Ω_0, une hauteur reste fixe en $r_0 = L/\sqrt{2}$. Comme le montre la figure 15, les surfaces libres pour différentes valeurs de rotation du bassin s'intersectent en ce cercle de rayon r_0.

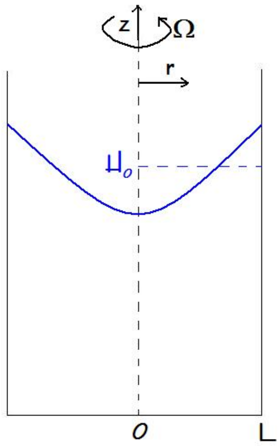

FIG. 14 – Surface libre dans un bassin cylindrique en rotation

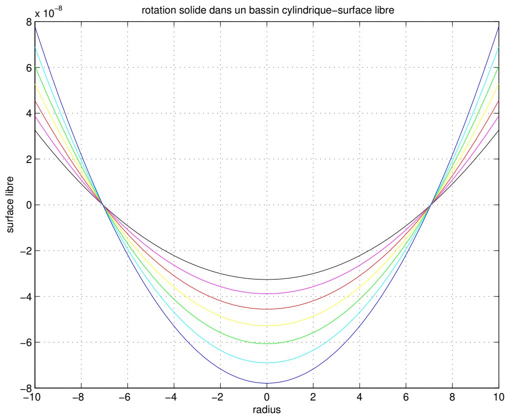

FIG. 15 – Surfaces libres dans un bassin cylindrique pour différentes rotations

Ceci est vrai dans la limite de l'affleurement, c'est à dire jusqu'à une rotation $\Omega_l^2 = 4H_0g/L^2$. Dès lors, la surface libre touche le fond et n'a plus la même expression que précédemment, de manière à conserver la masse de fluide. On note aussi qu'il n'y a alors plus de hauteur fixe.

-fluide stratifié : deux couches

L'intérêt maintenant de passer sur un système bicouche est d'éviter la couche frictionnelle de fond. Ici, on vérifie que les premières observations faites pour un fluide homogène peuvent toujours être appliquées pour un fluide stratifié.

Pour deux couches en rotation solide à des vitesses différentes, on détermine les expressions de la surface libre et de l'interface :

$$h_1(r) = H_1 + \frac{\Omega_1^2}{2g}(r^2 - \frac{L^2}{2}) \tag{35}$$

$$h_2(r) = H_2 + \frac{\rho_2\Omega_2^2 - \rho_1\Omega_1^2}{\rho_2 - \rho_1}\frac{1}{2g}(r^2 - \frac{L^2}{2}) \tag{36}$$

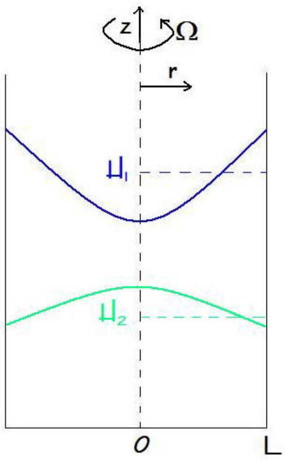

FIG. 16 – Rotation solide pour un système bicouche

On remarque alors que le même rayon r_0 apparaît ici comme le lieu où l'interface garde une hauteur fixe quelles que soient les rotation des fluides. A priori, les mêmes raisonnements de convergence de fluide en cette zone seront applicables à un système bicouche.

Le problème de l'affleurement apparait maintenant en plus entre l'interface et la surface libre. Dès que $\Omega_2^2 - \Omega_1^2 = (H_2 - H_1) \cdot (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2) \cdot (2gh_1)/L^2$, la couche du fond affleure.

3.2 Cas de la Terre

Pour une étude océanique, ces principes sont à replacer sur le géoïde. Comme dans le cylindre, les surfaces libres de deux rotations différentes se coupent en un cercle de latitude λ_0 constante, dépendant de la différence des vitesses de rotation. (cf figure 17).

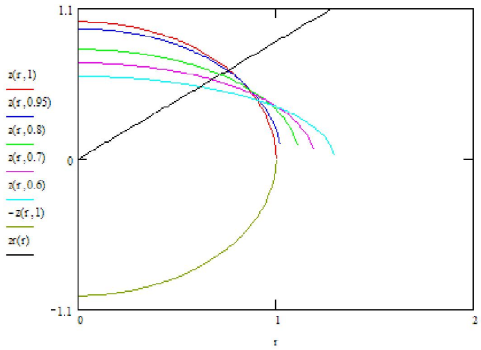

FIG. 17 – Formes du géoide pour différentes rotations

Dans le calcul suivant, on cherche la latitude à laquelle s'intersecte la sphère et une ellipse correspondant à une faible rotation.

Ce problème conserve l'énergie totale (potentielle et cinétique) :

$$g\sqrt{z^2 + r^2} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = g z_0 \tag{37}$$

avec z et r les coordonnées cylindriques de la surface libre, et z_0 la côte au pôle.

Posons $a = \Omega^2 r^2/2g$. Pour $a << 1$, on a comme équation du géoïde :

$$z^2 + r^2(1 - 2az_0) = z_0^2 \tag{38}$$

On pose $z_0 = 1$ dans le cas de la sphère (c'est à dire pour $a = 0$). Dans ces conditions, le volume de la sphère pour une rotation nulle est de $V = 4\pi/3$, alors que pour l'ellipse, il est de $V = 4\pi z_0^3/3(1-2az_0)$. La conservation de la masse qui se traduit dans le cas d'un fluide incompressible par la conservation du volume donne la relation suivante :

$$z_0^3 + 2az_0 = 1 \tag{39}$$

Pour trouver l'intersection de la sphère et d'une ellipsoïde, on résout un système de deux équations (38) avec $a = 0$ et $z_0 = 1$ pour l'équation de la sphère. En utilisant la relation (39), on obtient alors les valeurs des coordonnées de la latitude d'intersection :

$$r_* = \sqrt{\frac{1 + z_0}{1 + z_0 + z_0^2}} \tag{40a}$$

$$z_* = \sqrt{z_0^2 - r_*^2 z_0^3} \tag{40b}$$

Pour une rotation faible, $z_0 \to 1$. Or la tangente de la latitude est obtenue par le rapport z/r. Ainsi, on obtient, pour de faibles différences de rotation et pour un état d'origine sphérique, une intersection qui débute à une latitude telle que $\tan \lambda_0 = \sqrt{2}/2$ soit, pour une latitude de $35,3°$. On peut même montrer que cette latitude varie peu lorsque la rotation augmente : longtemps, le calcul reste correct en première approximation. On peut alors rapprocher cette valeur à la latitude du front des Açores dans l'Atlantique.

Pour un système bicouche, on pourrait également poser les conditions d'affleurement aux pôles.

Remarque

Il est à noter qu'on retrouve cette latitude particulière en prenant la sphère pour un état initial à un ajustement et en y calculant la divergence de la force d'entraînement horizontale.

Dans un système de coordonnées sphériques, la force centrifuge d'entraînement s'écrit :

$$\overrightarrow{f_e} = -\Omega^2 r \cos\theta \sin\theta \overrightarrow{u_\theta} + \Omega^2 r \cos^2\theta \overrightarrow{u_r} \tag{41}$$

La divergence de la partie horizontale de cette force est alors :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{f_{e_{hor}}} = \Omega^2 (2\sin^2\theta - \cos^2\theta) \tag{42}$$

Cette expression pour la divergence n'est pas toujours du même signe suivant θ. Elle est positive pour les hautes latitudes et négative pour les basses latitudes. On remarque que la divergence s'annule en $\theta_0 = 35,3°$.

Ces deux façons de retrouver une même latitude singulière sur la sphère mène, en première approximation, à la considérer comme une latitude charnière pour l'ajustement géostrophique entre la surface libre des eaux des pôles qui descend et celle de la région équatoriale qui s'écarte du centre de la Terre. Ces premières analyses purement géométriques nous incitent donc à nous intéresser à cette zone de latitude λ_0 autour de laquelle il y aurait dans un phénomène d'ajustement convergence des masses d'eau océaniques. La suite de l'étude est faite dans le cylindre pour aborder le problème plus simplement.

4 Ajustement géostrophique

Ici, on tente de retrouver par le calcul les interprétations faites plus haut.

4.1 Ajustement de la surface libre

On reprend les notations de la figure 14. L'ajustement géostrophique auquel on s'intéresse part d'un état initial en rotation solide à Ω mais avec une surface libre forcée à $h_0(r)$. Cette surface forcée est pour le système une perturbation de sa masse, la relaxation de la contrainte initiale appliquée va donc engendrer un réajustement de la part du fluide de façon à atteindre un équilibre géostrophique. Dans l'étude ci-après, on pose la perturbation de manière à ce que la surface forcée initiale corresponde à une surface libre d'une rotation solide à Ω_0, soit :

$$h_0(r) = H_0 + \frac{\Omega_0^2}{2g}(r^2 - \frac{L^2}{2}) \tag{43}$$

La dynamique d'ajustement qui se crée lorsqu'on annule le forçage obéit alors aux équations de la géostrophie dans un repère cylindrique :

$$2\Omega v = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r}\partial_\psi p \tag{44a}$$

$$-2\Omega u = -\frac{1}{\rho_0}\partial_r p - \frac{\rho}{\rho_0} g\cos\phi \tag{44b}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\partial_z p - \frac{\rho}{\rho_0} g\sin\phi \tag{44c}$$

et, l'équation différentielle de la hauteur finale se trouve par la conservation de la vorticité potentielle : $q_0 = q_f$. Avec :

$$q_0 = \frac{2\Omega}{h_0(r)} \tag{45a}$$

$$q_f = \frac{\zeta^*}{h(r)} \tag{45b}$$

et

$$\zeta^* = \frac{\Omega_0^2}{2g}\frac{1}{r}(h' + rh''), \tag{46}$$

la vorticité absolue.

La hauteur finale obéit alors à l'équation suivante :

$$r(1+r^2)h" + (1+r^2)h' - 4\delta^2 rh = 0 \tag{47}$$

Pour la simplifier, on l'a adimensionnalisée de la façon suivante :

$$\delta = \frac{\Omega}{\Omega_0} \tag{48a}$$

$$\alpha^2 = \frac{2gH_0}{\Omega_0^2} - \frac{L^2}{2} \tag{48b}$$

$$r^2 \leftarrow \frac{r^2}{\alpha^2} \tag{48c}$$

On a résolu cette équation à l'aide de séries entières et trouvé pour la surface libre :

$$h(r) = a_0(1 + \frac{\delta^2}{\alpha^2} r^2) + a_0 \delta^2 \sum_{k=2}^{\infty} (\prod_{l=1}^{k-1} \frac{\delta^2 - l^2}{(1+l)^2}) \frac{r^{2k}}{\alpha^{2k}} \tag{49}$$

avec

$$a_0 = \frac{H_0}{1 + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\frac{L^2}{2} + \delta^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1} (\prod_{l=1}^{k-1} \frac{\delta^2 - l^2}{(1+l)^2}) \frac{L^{2k}}{\alpha^{2k}}}, \tag{50}$$

déterminé par la conservation de la masse.

Avec le logiciel mathcad, on a pu tracer les hauteurs finales pour quelques valeurs entières de δ. Sur la figure 18, on trace en vert la surface forcée initiale correspondant à une surface libre pour une rotation Ω_0, puis, en bleu, la surface libre correspondant à la rotation Ω (ici $\Omega = 3\Omega_0$) et enfin, en rouge, la hauteur ajustée.

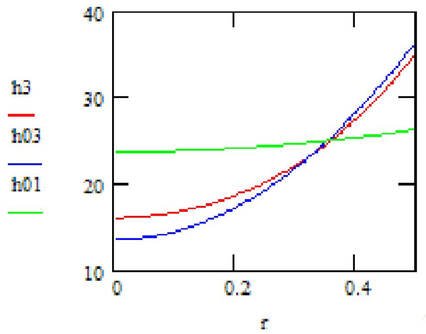

FIG. 18 – Surfaces libres et surface ajustée géostrophiquement

On s'aperçoit que la courbe de la hauteur ajustée se situe globalement entre la surface initiale et la courbe de rotation solide à Ω. Dans un souci de lisibilité de la figure, on a exagérément augmenté la valeur de Ω par rapport à Ω_0. On peut ainsi voir que le cylindre à r_1 de hauteur constante (intersection de la courbe verte et rouge) est légèrement décalé par rapport au cylindre à r_0 introduit plus haut. Pour un ajustement avec un faible écart entre Ω et Ω_0, on obtient cependant des rayons r_0 et r_1 très similaires.

4.2 Profil des vitesses

La vitesse relative du fluide dans le cylindre tournant est obtenue par la relation :

$$v_{rel} = \frac{g}{2\Omega} \partial_r h - \Omega r \tag{51}$$

On obtient ainsi sur la figure 19, le profil de vitesse zonale pour différents ajustements.

On retrouve les maxima de vitesse pour les mêmes rayons que ceux correspondant à l'intersection entre la courbe de la surface initiale et la courbe de la surface finale ajustée. On retrouve donc les hypothèses posées par l'analyse géométrique : un maximum de vitesse existerait à l'intersection des surfaces initiale et finale d'un fluide dont la conservation de vorticité potentielle se traduit par la conservation de la hauteur des colonnes de Taylor. Ce premier résultat est positif, mais il reste très approximatif par rapport à un front océanique. Tout d'abord, les accélérations utilisées dans notre étude sont énormes ($\delta = 2$, 3 ou 4), il ne peut en être question sur le globe terrestre. Un ajustement géostrophique engendré par exemple à la suite d'une répartition de masse dûe à la variation éolienne saisonnière peut-il encore engendrer un maximum de vitesse conséquent ? Ensuite, le profil de vitesse

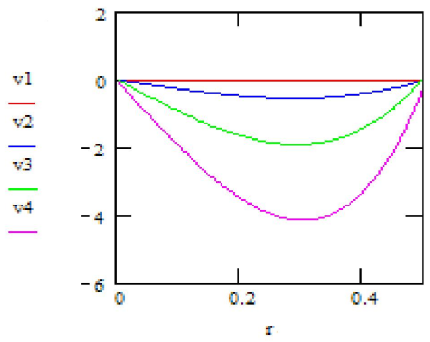

FIG. 19 – Vitesses zonales pour différents ajustements géostrophiques

du jet dans le bassin cylindrique est très progressif et occupe toute la largeur du bassin. Or, il faut tenir compte du fait que la dynamique au sein des océans est régie, non pas par la variation de vorticité relative qu'on permet lors de l'ajustement géostrophique, mais par la conservation du rapport f/h. Il faut donc restreindre la dynamique étudiée à une couche limite au niveau des zones de convergence du fluide où la vorticité relative ne sera plus négligeable par rapport à la vorticité planétaire. On aura alors deux solutions à raccorder : une pour l'intérieur océanique, et une pour ces zones de jets zonaux.

Conclusion

L'étude ci-dessus a permis d'appréhender différents problèmes de répartition de masse au sein des océans en ayant toujours comme idée directrice la conservation de la vorticité potentielle et la dynamique des colonnes de Taylor.

Ainsi, à l'équateur, on montre que la dynamique des colonnes de Taylor peut impliquer un changement dans la dynamique des mouvements océaniques. En effet, en étudiant les équations caractéristiques dans un repère en coordonnées cylindriques, on a mis en évidence des termes non linéaires qui donnaient lieux à des discontinuités sur le cylindre (Γ). Par exemple, le cisaillement de vitesse entre les deux couches océaniques, la vitesse de propagation des ondes sur l'interface et les pentes de l'interface ne peuvent être continues simultanément. Ces conclusions sont compatibles avec les cartes de données qui, pour les champs de vitesse ou les pentes de l'interface, montrent des discontinuités aux latitudes du cylindre tangent.

Puis, en poussant l'étude vers un cas extrême où la vorticité potentielle serait homogème dans chaque couche océanique d'un océan bicouche, on peut espérer trouver une même tendance à former des jets zonaux au niveau de l'équateur que dans le cas unicouche traité par Hide et James (1983). Mais le problème est en cours de résolution et, il n'est présenté ici que la première équation de la dynamique à résoudre.

Quittant l'équateur, la troisième partie se situe aux niveau des moyennes latitudes. Bien que toujours basée sur la dynamique des colonnes de Taylor, l'étude se focalise cette fois non plus sur les discontinuités créées par la forme de la Terre et sa rotation axisymétrique, mais sur les latitudes de convergence de l'eau lors d'un ajustement géostrophique. Cette approche très géométrique d'un problème grande échelle est très intéressante dans le sens où justement, elle ne fait intervenir que la physique grande échelle du mouvement d'un fluide en rotation. De plus que les premiers résultats ici vont dans le sens des observations de jets zonaux aux moyennes latitudes, même si la simplicité de cette approche ne permet pas encore de retrouver exactement le phénomène.

La suite de ce travail pourrait être, d'une part, de faire le lien entre les deux premières parties se situant à l'équateur et, d'autre part, pour la troisième étude, de transposer les résultats sur le géoïde, puis de restreindre la dynamique de forte vorticité relative autour de la latitude des fronts océaniques pour la relier avec une dynamique plus réaliste de l'intérieur de l'océan où il y a très peu de vorticité relative.

Références

Colin de Verdière A., Schopp R. 1994 : Flows in a rotating spherical shell : the equatorial case. *J. Fluid Mech.*, **276**,233–260

Hide R., James I. 1983 : Differential rotation produced by potential vorticity mixing in a rapidly rotating fluid. *Geophys. J. R. Astr. Soc*, **74**,301–312

Pedlosky J. (1996) *Ocean Circulation Theory*. 1 edn Springer, Berlin

Schopp R., Colin de Verdière A. 1997 : Taylor columns between concentric spheres. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **86**,43–73

Veronis G. 1963 : On the approximation involved in transforming the equations of motion from a spherical surface to the β-plane. i. barotropic systems. *J. Mar. Res.*, **21**(2),110–124