

UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE - BREST

Laboratoire de Physique des Océans

**Rapport de stage, M1 PMMC**

Encadrants : Steven Herbette et Alain Colin de Verdière

Forçage dipolaire sur un plan  $\beta$

---

Antoine Hochet

# Remerciements

Je remercie tout d'abord mes deux maîtres de stage : Steven Herbette et Alain Colin de Verdière pour leur soutien scientifique et technique.

Merci à l'ensemble du personnel du LPO pour leur accueil chaleureux et plus particulièrement aux doctorants pour leur humour décapant. Merci aussi à mes collègues stagiaires du LPO : Clemence, Pierre et Saad pour m'avoir supporté pendant 2 mois.

Je tiens de plus à remercier les personnes qui feront partie du jury à savoir Claude Guennou, Alain Colin de Verdière, Xavier Carton et Pascal Riviere.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Principe de l'expérience et équations du mouvement</b>	<b>5</b>
1.1	Description de l'expérience . . . . .	5
1.2	Les équations qui régissent le mouvement . . . . .	6
1.3	Les approximations . . . . .	6
1.3.1	L'équilibre hydrostatique . . . . .	6
1.3.2	Les équations quasi-géostrophiques . . . . .	7
1.4	L'équation de la vorticité . . . . .	7
1.4.1	Couche d'Ekman de fond . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Recherche d'une solution stationnaire</b>	<b>10</b>
2.1	Solution libre . . . . .	10
2.2	Solution avec la condition $\psi = 0$ à l'ouest . . . . .	11
2.3	Analyse de la solution . . . . .	12
2.3.1	La vitesse . . . . .	12
2.3.2	Le jet zonal . . . . .	13
2.3.3	Développement asymptotique . . . . .	14
2.4	Validité de cette solution linéaire . . . . .	16
2.5	Adimensionnement de l'équation . . . . .	16
2.6	Recherche d'une solution à l'équation non linéaire dans la couche limite de Stommel . . . . .	17
2.6.1	Présentation de la méthode de Newton . . . . .	18
2.6.2	Application à l'équation 2.14 . . . . .	18
2.6.3	Résultats . . . . .	19
2.7	Ajout des termes inertiels par la méthode des perturbations . . . . .	20
2.7.1	Présentation de la méthode . . . . .	20
2.7.2	Résultats . . . . .	20
2.8	Vorticité potentielle . . . . .	22
2.8.1	Importance de la vorticité potentielle dans les critères de stabilité . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Etude des résultats du modèle numérique.</b>	<b>24</b>
3.1	Origine des instabilités . . . . .	24
3.2	Variation des paramètres et stabilité . . . . .	25
3.2.1	Forçage faible : $q=10\text{ml/min}$ . . . . .	25
3.2.2	Forçage élevé : $q=500\text{ml/min}$ . . . . .	25
3.2.3	Forçage intermédiaire : $q=100\text{ml/min}$ . . . . .	26
3.2.4	Recherche d'une condition nécessaire d'instabilité pour le forçage intermédiaire . . . . .	28
<b>A</b>	<b>Solution de Stommel</b>	<b>32</b>
<b>B</b>	<b>Programme calculant la solution non linéaire dans la couche limite de Stommel</b>	<b>34</b>
<b>C</b>	<b>Programme résolvant l'équation linéaire numériquement</b>	<b>36</b>
<b>D</b>	<b>Programme calculant la correction due aux termes non linéaires</b>	<b>39</b>
<b>E</b>	<b>Programme pour tenter de calculer une solution à l'équation stationnaire et non linéaire</b>	<b>43</b>

# Introduction

Après 2 km de profondeur et jusqu'à 4-5 km<sup>1</sup>, la température de l'eau est en moyenne inférieure à 4°C. La présence d'eau à une température aussi basse dans ces régions peut être expliquée par le refroidissement de l'océan par l'atmosphère aux zones polaires (Arctique et Antartique) et par une circulation profonde de grande échelle. L'eau froide coule au niveau des régions polaires, remplit le bassin océanique profond et remonte vers la surface où elle est réchauffée puis enfin retourne vers les pôles pour remplacer l'eau qui a coulé. Un cycle sans fin est ainsi formé.

Ces sources d'eaux froides peuvent être trouvées en Antartique au niveau des mers de Weddell et Ross. Au Nord, les plongées d'eaux profondes ont lieu en Mer de Norvège, Mer du Grönland et Mer du Labrador. Ces eaux viennent ensuite alimenter les masses d'eaux profondes du Bassin Atlantique Nord en s'écoulant vers le Sud en suivant un chemin plus ou moins complexe. A cause des difficultés à mesurer sur le long terme les courants océaniques profonds, le domaine est encore largement méconnu. L'une des questions est de savoir de quelle manière l'eau froide remonte vers la surface. On suppose, étant donné qu'il n'a pas été trouvé de grande zone de remontée, qu'elle s'effectue en plusieurs endroits. Il est néanmoins intéressant en première approximation d'étudier la réponse de l'océan à un forçage dipolaire constitué d'une source et d'un puits d'intensités égales pour modéliser respectivement la plongée et la remontée. Une série d'expériences réalisée en cuve par Alain Colin de Verdière a montré l'existence de deux régimes distincts : un régime instable lorsque la source est au Nord et le puits au Sud ; et un régime stable lorsque la source est au Sud et le puits au Nord. Ces deux régimes sont illustrés au travers des champs d'élévation de surface libre issus de simulations numériques présentées sur la figure (1).

L'objectif de ce stage est d'essayer d'expliquer la différence de régime observée lors de ces expériences. Après avoir expliqué rapidement le principe de l'expérience, on commence par mettre en place les équations qui régissent le mouvement. Puis on montre que sous certaines approximations, notamment en omettant les termes non linéaires, une solution analytique est dérivable. On analyse ensuite cette solution analytique. Ensuite, nous cherchons à ajouter l'effet des termes non linéaires omis précédemment dans le but d'une part d'en observer les effets et d'autre part de trouver une explication à la différence de régime observée. Enfin, une dernière partie est consacrée à l'étude des résultats obtenus grâce aux expériences numériques non linéaires.

---

1. sauf au niveau de la dorsale médio atlantique

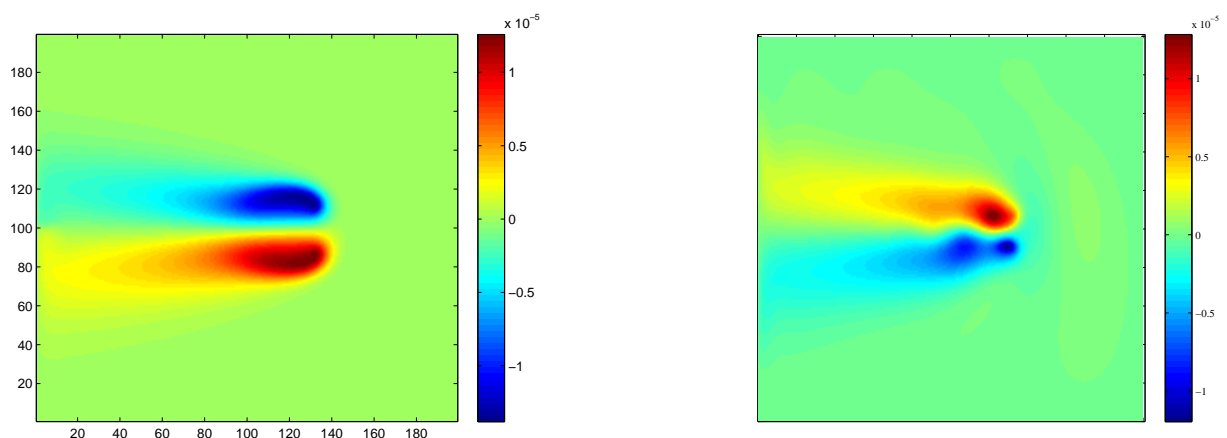


FIGURE 1 – Configuration stable (gauche) et instable (droite)

# Chapitre 1

## Principe de l'expérience et équations du mouvement

### 1.1 Description de l'expérience

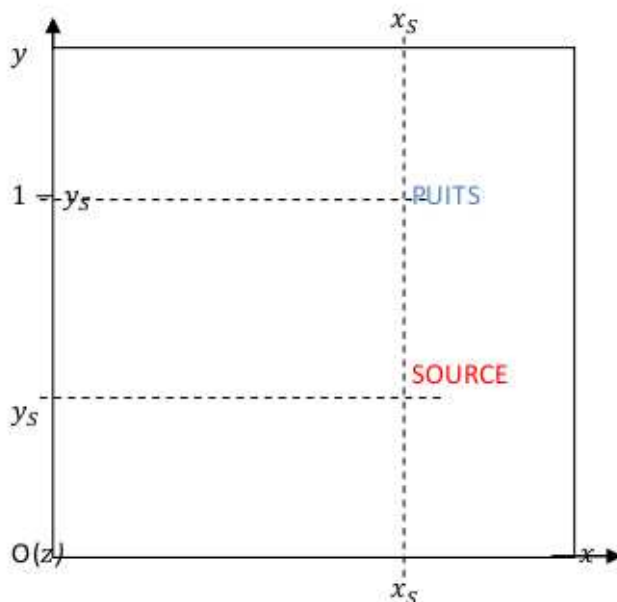


FIGURE 1.1 – La cuve vue de dessus

L'expérience consiste à placer une source d'eau et un puits dans un bassin de forme carrée, de côté  $L$  que l'on prendra égal à 1 mètre. Grâce à une pompe l'eau est aspirée à l'emplacement du puits puis réinjectée à la source. Le bassin tourne autour de son centre à une vitesse angulaire  $\Omega$  et le fond est en pente (angle  $\alpha$  avec l'horizontale), Les figures (1.1) et (1.2) schématisent cette configuration.

La rotation du bassin et le fond en pente visent à recréer respectivement la rotation de la Terre et l'effet  $\beta$  c'est à dire la variation du terme de Coriolis avec la latitude<sup>1</sup> Dans la suite de ce rapport, on utilisera (sauf indication contraire)  $H = 0,22\text{m}$  la hauteur de l'eau dans le bassin,  $\Omega = \frac{2\pi}{10}$  On peut déjà remarquer que  $\frac{H}{L} \sim 10^{-1}$ .

1.  $f = f_0 + \beta y$  sur un plan  $\beta$ .  $f$  varie donc avec  $y$ , la latitude.

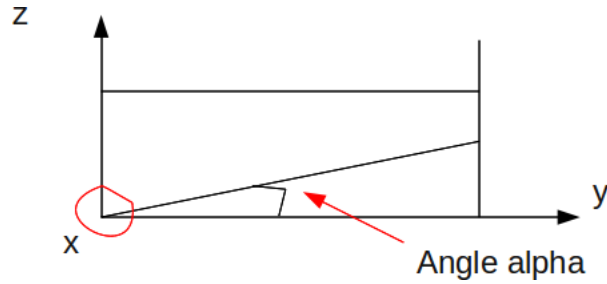


FIGURE 1.2 – Dessin de la pente (coupe  $y0z$ )

## 1.2 Les équations qui régissent le mouvement

Les équations qui régissent le mouvement pour un fluide géostrophique en rotation sont :

$$\rho \left( \frac{d}{dt} + 2\vec{\Omega} \otimes \right) \vec{u} = -\vec{\nabla} p - \rho g \vec{k} + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

où

$$- \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

-  $\rho$  : masse volumique

-  $p$  : pression

-  $\vec{u} = (u, v, w)$  vitesse du fluide

-  $\mu$  viscosité

-  $\vec{\Omega}$  vecteur rotation :  $\Omega \vec{k}$  où  $\vec{k}$  est le vecteur vertical

A ceci s'ajoutent une équation d'état qui lie  $\rho$  à la température, la salinité et la pression et deux équations d'évolution des traceurs T et S. Mais cette expérience est réalisée avec  $\rho, T$  et  $S$  constantes. On écrit donc  $\rho = \rho_0$  et on simplifie les équations de la manière suivante :

$$\left( \frac{d}{dt} + 2\vec{\Omega} \otimes \right) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} - g \vec{k} + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{u} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

Par la suite, on écrira  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ . Nous avons donc 4 équations avec 4 inconnues :  $u, v, w$  et  $p$ . Nous allons maintenant effectuer quelques approximations pour les simplifier.

## 1.3 Les approximations

### 1.3.1 L'équilibre hydrostatique

En examinant les ordres de grandeur dans l'équation de continuité (1.2), 3 possibilités s'offrent à nous :

$$\begin{aligned} - \frac{U}{L} &\sim \frac{W}{H} \\ - \frac{U}{L} &\gg \frac{W}{H} \\ - \frac{U}{L} &\ll \frac{W}{H} \end{aligned}$$

Avec  $U$  l'échelle des vitesses horizontales,  $W$  l'échelle pour la vitesse verticale,  $H$  l'échelle verticale et  $L$  l'échelle horizontale.

La troisième et dernière possibilité est à éliminer. Elle implique en effet que  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ , c'est à dire  $w$  constant sur la verticale. Pour cela le fluide devrait être alimenté à la surface par une convergence latérale. Ce qui impliquerait  $\frac{U}{L} \sim \frac{W}{H}$  ou  $\frac{U}{L} \gg \frac{W}{H}$  contredisant l'hypothèse de départ. Seules les deux premières hypothèses sont réalisables, impliquant  $W \leq \frac{H}{L} U$ . Mais  $H \ll L$  donc  $W \ll U$ . Une nouvelle approximation est donc possible dans les équations du mouvement : l'équation concernant la vitesse verticale peut être réduite à l'équilibre hydrostatique,  $\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$  devient  $\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho_0$ .

### 1.3.2 Les équations quasi-géostrophiques

Les vitesses dans le bassin étant faibles, le nombre de Rossby qui compare la vitesse au terme de Coriolis :  $R_o = \frac{U}{\Omega L}$  est très inférieur à 1. L'équilibre dominant est donc l'équilibre géostrophique c'est à dire l'équilibre entre les termes de pression et les termes de Coriolis dans les équations du moment :

$$\begin{aligned} 2\Omega v_g &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ 2\Omega u_g &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Où  $u_g$  et  $v_g$  sont les vitesses géostrophiques. En dérivant ces deux équations par rapport à  $z$ , on obtient  $\partial_z u_g = 0$  et  $\partial_z v_g = 0$  (puisque  $\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho_0$ ). On montre que si l'équilibre géostrophique est réalisé à un instant donné alors  $\partial_z u$  et  $\partial_z v$  sont nuls tout le temps. En effet, en dérivant la première équation de conservation du moment par rapport à  $z$  on obtient :

$$\frac{d(\partial_z u)}{dt} + \partial_z u \partial_x u + \partial_z v \partial_y u + \partial_z w \partial_z u - 2\Omega \partial_z v = -\frac{1}{\rho_0} \partial_{xz} p + \nu \nabla^2 \partial_z u \quad (1.4)$$

qui devient  $\frac{d(\partial_z u)}{dt} = 0$  lorsque  $u$  est géostrophique, et puisque  $\partial_z u_g = 0$ ,  $\partial_z u = 0$  tout le temps. Par le même raisonnement, on montre que  $\partial_z v = 0$  tout le temps. Ce qui nous mène finalement à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2\Omega v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2\Omega u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (1.6)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} &= -g\rho_0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

## 1.4 L'équation de la vortacité

En prenant le rotationnel de (1.5) et (1.6) les termes de pression sont éliminés et on obtient :

$$\frac{d\zeta}{dt} = (2\Omega + \zeta) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \nabla^2 (\partial_x v - \partial_y u) \quad (1.7)$$

Où  $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$  est la vortacité relative.  $2\Omega \sim \Omega$  et  $\zeta \sim \frac{U}{L}$ , le nombre de Rossby ( $R_o = \frac{U}{\Omega L}$ ) étant petit,  $2\Omega + \zeta$  est approximé par  $2\Omega$ . On négligera par la suite les effets de la diffusion horizontale pour nous concentrer sur la friction de fond. En intégrant cette équation sur la hauteur, c'est à dire de  $\tan \alpha y$  à  $H$ , on obtient :

$$(H - \tan \alpha y) \frac{d\zeta}{dt} = 2\Omega (w_s - w_f) \quad (1.8)$$

La vitesse verticale de surface  $w_s$  est donnée par  $\frac{d\eta}{dt}$  plus le forçage  $F$ , où  $\eta$  est le déplacement de la surface libre. Et la vitesse verticale de fond par  $w_f = \alpha v$  pour garantir une vitesse normale au fond nulle (voir figure 1.3).

Pour continuer, nous avons besoin de présenter le phénomène de friction sur le fond créé par la couche d'Ekman.

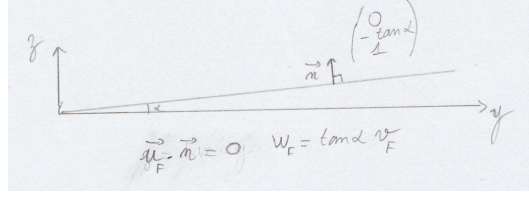


FIGURE 1.3 – Vitesse au fond

### 1.4.1 Couche d'Ekman de fond

Pour une couche d'Ekman sur fond en pente les calculs sont longs et compliqués[7]<sup>2</sup>. Le but étant simplement de présenter le principe nous allons ici dériver les calculs pour un fond horizontal.

Dans ce qui précède le nombre d'Ekman étant très inférieur à 1, nous avons négligé les termes dus à la viscosité. Cependant, près du fond, ces termes ne sont plus négligeables. En effet, en examinant les équations de quantité de mouvement horizontale (1.5 et 1.6) on observe que les termes de viscosité sont d'ordre 1 dans une couche limite épaisse de  $d_e \sim \sqrt{\frac{\nu_E}{\Omega}}$ . Où  $\nu_E$  est la viscosité dans la couche d'Ekman.

On écrit  $u = u_g + u_e$  et  $v = v_g + v_e$  où  $u_e, v_e$  sont les vitesses dues à la couche d'Ekman et on remarque que dans cette couche, la variation verticale étant largement supérieure à la variation horizontale<sup>3</sup> :  $\nabla^2 u \sim \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ . En additionnant  $i$  fois la première équation du moment à la deuxième, on obtient pour  $u_e$  et  $v_e$  :

$$2\Omega(u_e + iv_e) = \nu_E \frac{\partial^2 (u_e + iv_e)}{\partial z^2} \quad (1.9)$$

$u_e, v_e$  disparaissent quand  $z \rightarrow \infty$  et  $u_e + iv_e = u_g + iv_g$  en  $z = 0$  d'où :

$$u_e + iv_e = -(u_g + iv_g) \exp\left(-\left(1 + i\right)\left(\frac{\Omega}{\nu_E}\right)^{1/2} z\right) \quad (1.10)$$

où  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$  est une des deux solutions de  $i = x^2$ . En intégrant  $v_e$  et  $u_e$  de 0 à  $+\infty$  on obtient :

$$\begin{aligned} U_e &= -\left(\frac{\nu_E}{4\Omega}\right)^{1/2} (u_g + v_g) \\ V_e &= \left(\frac{\nu_E}{4\Omega}\right)^{1/2} (u_g - v_g) \end{aligned}$$

L'intégration de l'équation de continuité sur la hauteur nous donne dans un premier temps (étant donné que  $U_e$  et  $V_e$  ne sont pas dépendants de  $z$ ) :

$$w_e = -\left(\frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial V_e}{\partial y}\right) \quad (1.11)$$

Puis en utilisant ce qui a été trouvé précédemment :

$$w_e = \left(\frac{\nu_E}{4\Omega}\right)^{1/2} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right) \quad (1.12)$$

$w_e$  est donc proportionnel à  $\zeta_g$ . La couche limite étant épaisse de  $d_e = \sqrt{\frac{\nu_E}{\Omega}}$ , on écrit :  $w_e = \frac{d_e}{2} \zeta_g$ . On revient

maintenant à l'équation (1.8). La subtilité ici consiste à écrire  $w_f$  comme étant la somme de  $\tan(\alpha)v$  et de la vitesse verticale créée par la couche d'Ekman de fond c'est à dire  $w_e$ . Il faut noter que en faisant cette opération, on néglige l'épaisseur de la couche limite.

L'équation (1.8) devient :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2\Omega}{H - \tan(\alpha)y} \left(\frac{d\eta}{dt} + F - \alpha v\right) - \frac{2\Omega}{H - \tan(\alpha)y} \frac{d_E}{2} \zeta \quad (1.13)$$

2. voir pedlosky Geophysical Fluid Dynamics p.219

3. Cette approximation n'est plus possible avec un fond en pente : c'est l'une des raisons pour laquelle les calculs sont plus compliqués

Dans le but d'avoir une équation avec une seule variable, on introduit une fonction courant  $\psi$ . En écrivant que  $p$ , l'anomalie de pression vaut  $\rho_0 g \eta$ , les équations de l'équilibre géostrophique deviennent :

$$\begin{aligned} 2\Omega v_g &= g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 2\Omega u_g &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

En dérivant la première de ces équations par rapport à  $y$  et la deuxième par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 \quad (1.14)$$

On peut ainsi écrire  $u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$  et  $v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}$  avec  $\psi = \frac{g}{2\Omega} \eta$ . Ce qui donne en remarquant que  $\zeta = \nabla^2 \psi$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - \frac{4\Omega^2}{(H - \tan \alpha y)g} \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{2\Omega}{H - \tan \alpha y} \tan \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{2\Omega}{H - \tan(\alpha)y} \frac{d_E}{2} \nabla^2 \psi = \frac{2\Omega}{H} \text{Forcage} \quad (1.15)$$

Le terme en  $\frac{4\Omega^2}{(H - \tan \alpha y)g} \psi$  dans la dérivée par rapport au temps vient du fait que :  $\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{2\Omega}{g} \frac{\partial \psi}{\partial t}$  puisque  $u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$  pour un équilibre géostrophique.

En choisissant  $H$  grand et  $\alpha$  petit, on peut approximer les termes en  $H - \tan \alpha y$  par  $H$ . Par la suite, on écrira :  $\beta = \frac{2\Omega}{H} \tan(\alpha)$ . La pente dans le bassin est équivalente à l'effet  $\beta$  sur terre. On notera aussi  $\mu = \frac{2\Omega}{H} \frac{d_E}{2}$ . L'équation (1.15) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - \frac{4\Omega^2}{Hg} \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{2\Omega}{H} \tan \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \nabla^2 \psi = \frac{2\Omega}{H} \text{Forcage} \quad (1.16)$$

Remarque : Ici la vitesse forcée vaut 1 m/s, dans la suite nous écrirons  $\text{int} = \frac{2\Omega}{H} * \text{vitesse forcée}$  avec  $\text{int}$  en  $s^{-2}$ . Cette équation est celle sur laquelle nous nous baserons par la suite pour décrire le mouvement dans le bassin. Elle est composée de termes qui dépendent du temps :  $\frac{\partial}{\partial t}$ , de termes non linéaires :  $J(\psi, \nabla^2 \psi)$  et de termes linéaires :  $\frac{2\Omega}{H} \tan \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \nabla^2 \psi$ .

Dans la partie suivante, une solution stationnaire sera dérivée en négligeant les termes non linéaires.

## Chapitre 2

# Recherche d'une solution stationnaire

Il est instructif de commencer par regarder l'influence de la rotation sur la solution. Sans la rotation ni



FIGURE 2.1 – Solution au niveau de la source (gauche) et du puits (droite) sans rotation ni effet  $\beta$

l'Effet Beta, la solution aurait la forme présentée sur la figure (2.1). Mais le bassin tourne et la force de Coriolis



FIGURE 2.2 – Solution au niveau de la source (gauche) et du puits (droite) avec rotation sans effet  $\beta$

dévie le mouvement vers la droite (nous sommes dans l'hémisphère Nord) pour donner la solution figure (2.2). Pour regarder l'influence de l'effet  $\beta$  sur la solution il est nécessaire de résoudre l'équation analytiquement. C'est ce que nous ferons dans la partie suivante.

### 2.1 Solution libre

Nous allons résoudre l'équation suivante :

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \nabla^2 \psi = \text{int} * (\delta(x - x_s) \delta(y - y_s) - \delta(x - x_p) \delta(y - y_p))$$

Où  $x_s, y_s$  sont les coordonnées de la source et  $x_p, y_p$  celles du puits et  $\text{int}$  l'intensité de la source. On se concentrera pour la résolution sur un forçage composé uniquement d'une source d'intensité égale à 1. L'équation étant linéaire,  $-\psi$  est solution de  $\beta \frac{\partial(-\psi)}{\partial x} + \mu \nabla^2(-\psi) = -\delta(x - x_s) \delta(y - y_s)$ . Pour trouver la réponse au forçage du puits, il suffira donc de multiplier  $\psi$  par  $(-1)$  et de décaler le forçage en  $x_s, y_p$ .

En effectuant le changement de variable suivant  $\psi(x, y) = \exp(-\frac{\beta(x-x_s)}{2\mu})G(x, y)$  on se ramène à l'équation

$$\beta \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\beta}{2\mu} G \right) \exp(-\frac{\beta(x-x_s)}{2\mu}) + \mu \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\beta^2}{4\mu^2} G \right) \exp(-\frac{\beta(x-x_s)}{2\mu}) = \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \quad (2.1)$$

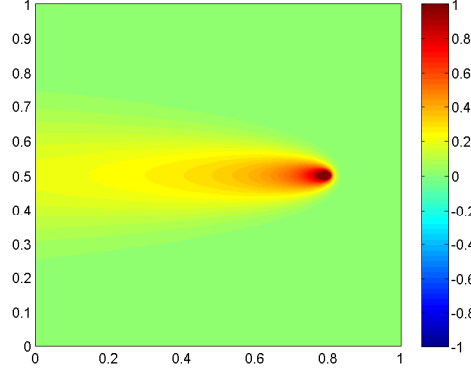


FIGURE 2.3 – Solution libre

puis en simplifiant, (en notant que  $\frac{\beta}{2\mu}\delta(x - x_s)\delta(y - y_s)\exp(-\frac{\beta(x-x_s)}{2\mu}) = \delta(x - x_s)\delta(y - y_s)$ )

$$\mu\nabla^2 G - \frac{\beta^2}{4\mu}G = \delta(x - x_s)\delta(y - y_s)$$

En divisant par  $\mu$  on obtient une équation de Poisson forcée en  $x_s, y_s$  :

$$\nabla^2 G - \frac{\beta^2}{(2\mu)^2}G = \delta(x - x_s)\delta(y - y_s)$$

On passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires avec  $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$ ,  $x - x_s = r \cos(\theta)$  et  $y - y_s = r \sin(\theta)$ . Le laplacien dans ce système de coordonnées vaut  $\nabla^2 G(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rG'(r))$  ce qui nous ramène à :

$$r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + r \frac{\partial G}{\partial r} - r^2 \left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 G = 0$$

puisque  $r^2 \delta(r) = 0$ . qui devient, en posant  $z = \left(\frac{\beta}{2\mu}\right)r$  :

$$z^2 \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + z \frac{\partial G}{\partial z} - z^2 G = 0$$

$I_\nu(z)$  et  $K_\nu(z)$  en sont les solutions pour  $\nu = 0$ . La première tend vers l'infini quand  $z$  tend vers l'infini tandis que la deuxième tend vers l'infini en zero. C'est donc cette dernière qui nous intéresse.

On obtient par conséquent comme solution pour  $\psi$  :

$$\psi(x, y, x_s, y_s) = \exp\left(-\frac{\beta(x - x_s)}{2\mu}\right) * K_0\left(\frac{\beta}{2\mu} * \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}\right) \quad (2.2)$$

Il faut noter qu'il s'agit de la solution libre c'est à dire de la solution sans conditions aux limites. L'image (2.3) représente cette solution pour un  $\mu$  de l'ordre de  $10^{-2}$ , un  $\beta$   $10^{-1}$  et une source positionnée en  $x_s = 0.8$ ,  $y_s = 0.5$ . Dans la suite (sauf indication contraire), on choisira  $\mu$  et  $\beta$  comme précédemment.

La solution a la forme d'un gyre qui s'étend vers l'ouest, cette asymétrie est le résultat du terme en exponentiel. On constate qu'elle devient rapidement nulle à l'est de la source, ainsi qu'au nord et au sud. Dans ce qui suit nous nous bornerons donc à chercher une solution qui satisfait la condition  $\psi = 0$  à l'ouest ( $\psi = 0$  étant naturellement vérifiée sur les autres bords).

## 2.2 Solution avec la condition $\psi = 0$ à l'ouest

Pour satisfaire la condition à l'ouest nous allons simplement ajouter une source à l'extérieur du domaine (méthode des images)[6]. On place cette source image de manière à ce qu'elle soit le symétrique de la source

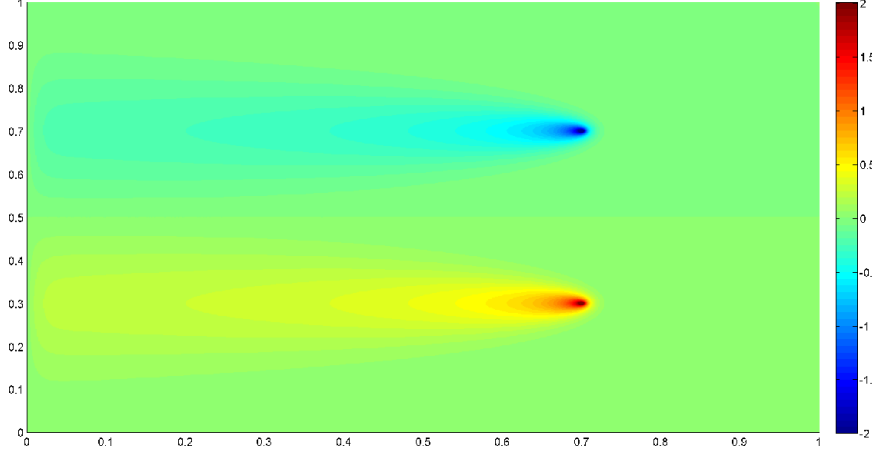


FIGURE 2.4 –  $\psi$  avec  $\psi = 0$  en  $x = 0$

objet par rapport à la droite  $x = 0$  c'est à dire en  $x_i = -x_s$  et  $y_i = y_s$ . L'équation suivante doit être vérifiée en  $x = 0$  :

$$\exp(-\lambda(-x_s))K_0(\lambda\sqrt{(-x_s)^2 + (y - y_s)^2}) + q * \exp(-\lambda(x_s))K_0(\lambda\sqrt{(x_s)^2 + (y - y_s)^2}) = 0 \quad (2.3)$$

où  $\lambda = \frac{\beta}{2\mu}$  et  $q$  est l'intensité de la source image. Pour que cette équation soit satisfaite, il faut donc :  $q = -\exp(2\lambda x_s)$ . Il en découle la solution suivante :

$$\psi_K = \exp(-\lambda(x - x_s)) * [K_0(\lambda\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}) - K_0(\lambda\sqrt{(x + x_s)^2 + (y - y_s)^2})] \quad (2.4)$$

Cette solution est dessinée sur la figure (2.4) en  $x_s = 0.7$   $y_s = 0.3$   $y_p = 0.7$ .

## 2.3 Analyse de la solution

On va dans le paragraphe qui suit analyser plus en détail la solution précédente.

### 2.3.1 La vitesse

A partir de la formule précédente ( 2.4),on peut calculer les vitesses horizontales  $u$  et  $v$ .

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\psi_K}{\partial y} \\ &= -\exp\{-\lambda(x - x_s)\} * \left\{ \frac{(y - y_s)}{((x - x_s)^2 + (y - y_s)^2)^{3/2}} * \right. \\ &\quad K_1[\lambda\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}] \\ &\quad \left. - \frac{(y - y_s)}{((x + x_s)^2 + (y - y_s)^2)^{3/2}} * K_1[\lambda\sqrt{(x + x_s)^2 + (y - y_s)^2}] \right\} \end{aligned}$$

où  $K_1$  est la fonction de Bessel d'ordre 1 et  $\psi_K$  désigne la solution trouvée précédemment. On a utilisé  $K_0'(z) = -K_1(z)$  [1].

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial\psi_K}{\partial x} \\ &= \exp\{-\lambda(x - x_s)\} \left\{ -\lambda * (K_0[\lambda\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}] \right. \\ &\quad \left. - K_0[\lambda\sqrt{(x + x_s)^2 + (y - y_s)^2}]) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{(y - y_s)}{((x - x_s)^2 + (y - y_s)^2)^{3/2}} * K_1[\lambda\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{(y - y_s)}{((x + x_s)^2 + (y - y_s)^2)^{3/2}} * K_1[\lambda\sqrt{(x + x_s)^2 + (y - y_s)^2}] \right\} \end{aligned}$$

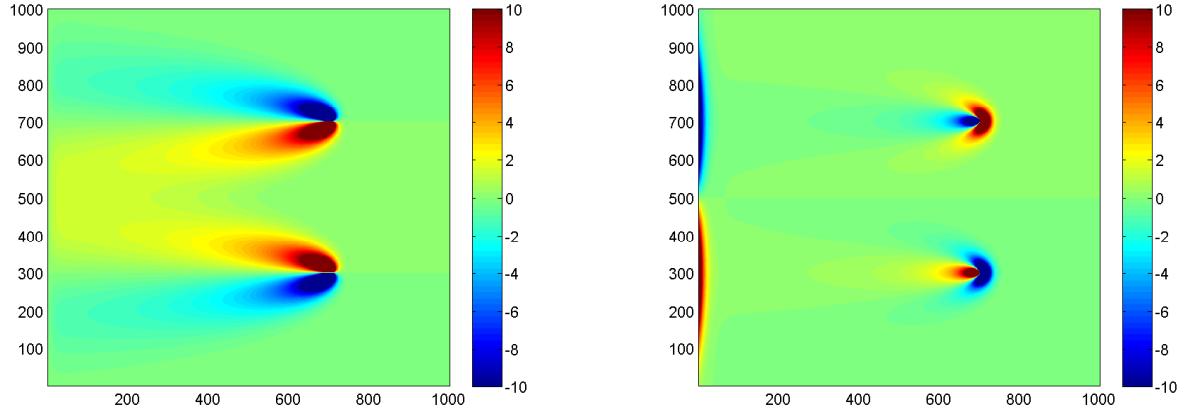


FIGURE 2.5 – Vitesse  $u$  (gauche) et  $v$  (droite) pour une source au Sud et un puits au Nord avec  $\text{int} \sim 20s^{-2}$

La vitesse  $v$  selon  $y$  est importante dans les couches limites à l'ouest mais aussi près de la source, tandis que  $u$  n'a pas de valeur significative dans cette couche (figure 2.5). Le flot est quasiment zonal en dehors des couches limites et loin de la source ou du puits.

### 2.3.2 Le jet zonal

On peut déjà grâce à cette solution observer une différence majeure entre les deux configurations. Quand la source est au nord et le puits au sud, le jet zonal qui se situe entre les deux est dirigé vers l'ouest alors qu'il est dirigé vers l'est dans la configuration inverse. On peut assez facilement trouver une condition nécessaire d'instabilité pour un jet zonal<sup>1</sup>, cette condition est, en écrivant  $U_O(y)$  la vitesse entre la source et le puits :

$$\beta - \frac{d^2 U_O}{dy^2} = 0 \quad (2.5)$$

quelque part entre la source et le puits. En français, cela veut dire que si le jet est instable alors il vérifie cette équation quelque part. Mais que s'il vérifie cette équation, il n'est pas forcément instable.

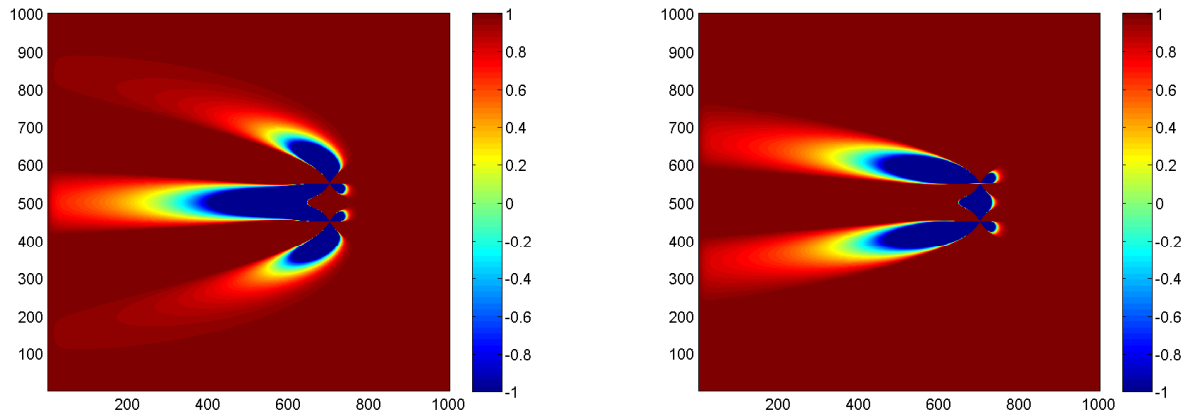


FIGURE 2.6 –  $\beta - \frac{d^2 U_O}{dy^2}$  pour une source au Nord (gauche) et pour une source au Sud (droite)

En calculant cette valeur (représentée figure 2.6), la zone à examiner est celle qui se situe entre  $y_s$  et  $y_p$ , on se rend compte que le seul cas où une condition nécessaire d'instabilité existe est lorsque la source est au

1. voir Pedlosky Geophysical Fluid Dynamics p.574

nord. Remarque : On a rapproché la source et le puits ( $y_s = 0.45$  et  $y_p = 0.55$ ) pour qu'il y ait un flot zonal entre les deux forçages. On ne peut cependant pas en déduire que l'instabilité est due à ce jet puisque d'une part ce n'est qu'une condition nécessaire et d'autre part nous ne savons pas si l'instabilité se développe au niveau de la couche limite, du jet ou de la source et du puits<sup>2</sup>.

### 2.3.3 Développement asymptotique

Pour mieux comprendre le comportement de la solution, la fonction  $K_0$  étant un peu opaque, nous allons en effectuer un développement asymptotique. On sait que  $K_0(z) \sim -\ln(z)$  quand  $z \rightarrow 0$  et  $K_0(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z)$  quand  $z \rightarrow \infty$ [1]. en adimensionnant  $x$  et  $y$  par  $L$ , ( $x = x^*L, y = y^*L, y_s = y_s^*L, x_s = x_s^*L$ )  $\epsilon = \frac{2\mu}{\beta L}$  on obtient pour une source le résultat suivant :

$$\exp\left(-\frac{x-x_s}{\epsilon}\right) \left[ K_0\left(\frac{\sqrt{((x^*-x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon}\right) - K_0\left(\frac{\sqrt{((x^*+x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon}\right) \right] \quad (2.6)$$

Lorsque  $\frac{\sqrt{((x^*-x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon} \ll 1$  et  $\frac{\sqrt{((x^*+x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon} \ll 1$  c'est à dire partout sauf dans un cercle de rayon  $\epsilon$  autour de la source, et en notant  $R_1 = \sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}$  et  $R_2 = \sqrt{(x+x_s)^2+(y-y_s)^2}$  ainsi que  $R_1^*$  et  $R_2^*$  les rayons adimensionnés, on écrit :

$$K_0\left(\frac{\sqrt{((x^*-x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon}\right) \sim \sqrt{\frac{\epsilon\pi}{2}} \left(\frac{\exp(-\frac{R_1^*}{\epsilon})}{\sqrt{R_1^*}}\right)$$

$$K_0\left(\frac{\sqrt{((x^*+x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon}\right) \sim \sqrt{\frac{\epsilon\pi}{2}} \left(\frac{\exp(-\frac{R_2^*}{\epsilon})}{\sqrt{R_2^*}}\right)$$

Mais à une distance  $\epsilon$  de la source, le développement asymptotique devient :

$$K_0\left(\frac{\sqrt{((x^*-x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon}\right) \sim -\log\left(\frac{\sqrt{((x^*-x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon}\right)$$

$$K_0\left(\frac{\sqrt{((x^*+x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon}\right) \sim -\log\left(\frac{\sqrt{((x^*+x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon}\right)$$

En dessinant le profil  $y = y_s$  (figure 2.8), on se rend compte qu'il existe 3 zones :

- près de la couche limite à l'ouest
- la solution intérieure entre la couche limite et la source
- près de la source

Les formules nous indiquent le même résultat :

Le deuxième terme en  $K_0$  :  $K_0\left(\frac{\sqrt{((x^*+x_s^*)^2+(y^*-y_s^*)^2)}}{\epsilon}\right)$  est important seulement quand  $x^*$  est proche de 0 et quand  $y^*$  est proche de  $y_s^*$  c'est à dire dans la couche limite. La solution peut alors être séparée en une solution intérieure valable loin de la couche limite et en une solution totale valable partout.

- Solution totale :

$$\psi = \exp\left(-\frac{\beta}{2\mu}(x-x_s)\right) \left( K_0\left(\frac{\beta}{2\mu}R_1\right) - K_0\left(\frac{\beta}{2\mu}R_2\right) \right)$$

- Solution intérieure :

$$\psi_{int} = \exp\left(-\frac{\beta}{2\mu}(x-x_s)\right) \left[ K_0\left(\frac{\beta}{2\mu}R_1\right) \right]$$

Finalement, on écrit :

$$\psi_{tot} = \psi_{int} \left[ 1 - \frac{K_0\left(\frac{\beta}{2\mu}R_1\right)}{K_0\left(\frac{\beta}{2\mu}R_2\right)} \right] \quad (2.7)$$

Ce qui donne, avec les développements asymptotiques (valable uniquement loin de la source) :

$$\psi_{tot} = \psi_{int} \left( 1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \exp\left[-\frac{1}{\epsilon}(R_2^* - R_1^*)\right] \right) \quad (2.8)$$

---

2. Pour l'instant. Nous verrons, dans la dernière partie, grâce au modèle numérique d'où vient l'instabilité.

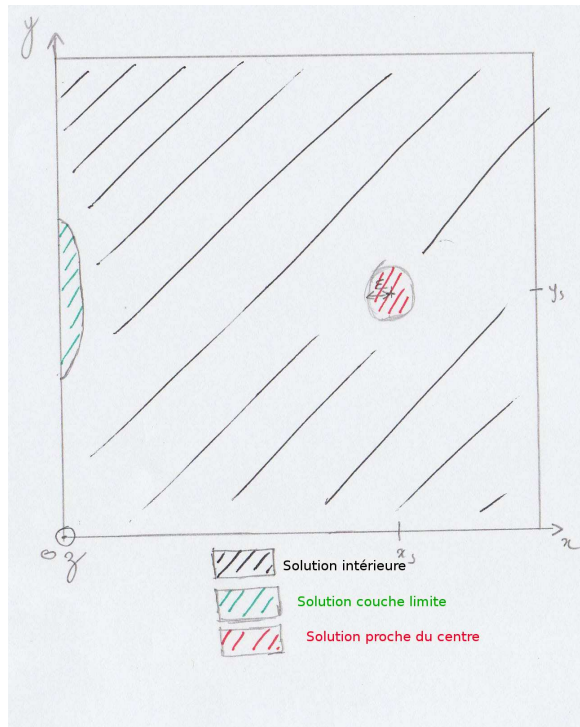


FIGURE 2.7 – Les différentes zones

On peut comparer cette solution à la solution de couche limite de Stommel qui est :  $\psi = \psi_{int}(1 - \exp(-\frac{x}{\epsilon}))$  (pour un forçage créé par un gradient de vent). Le terme en exponentielle disparaît dès lors que l'on s'éloigne de la couche limite. La principale différence avec la solution décrite ci dessus est qu'il s'agit dans notre cas d'un forçage ponctuel alors qu'il est réparti sur toute la surface (par le vent) dans le cas de Stommel.

*Remarque :* On peut d'ailleurs retrouver la solution du problème de Stommel en considérant notre solution comme une fonction de Green et en effectuant un produit de convolution entre le gradient de vent et cette dernière.<sup>3</sup>

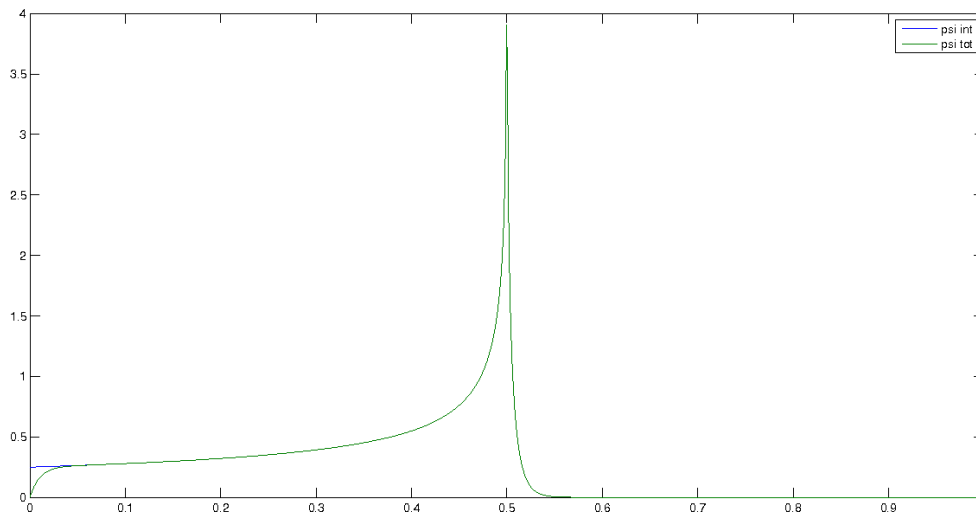


FIGURE 2.8 – Profil en  $y_s$  avec et sans la source image

Si on trace le profil en  $y_s$  de  $\psi_{int}$  et de  $\psi_{tot}$ , on obtient la figure (2.8). Ceci confirme que le deuxième terme créé par la source image n'est important que dans la couche limite à l'Ouest.

<sup>3</sup>. voir en annexe A

## 2.4 Validité de cette solution linéaire

Il est maintenant intéressant de regarder où cette solution est valable. En supposant que l'on peut réellement trouver une solution stationnaire au problème l'équation qui régit le mouvement dans le bassin est :

$$J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \nabla^2 \psi = \text{int} * [\delta(x - x_s) * \delta(y - y_s) - \delta(x - x_s) * \delta(y - y_p)] \quad (2.9)$$

et on sait que la solution analytique  $\psi_K$  vérifie  $\beta \frac{\partial \psi_K}{\partial x} + \mu \nabla^2 \psi_K = \delta(x - x_s) * \delta(y - y_s)$ . Pour voir le lieu de validité de la solution, il suffit donc de l'insérer dans l'équation (2.9) et de regarder les lieux où  $J(\psi_K, \nabla^2 \psi)$  est effectivement petit.

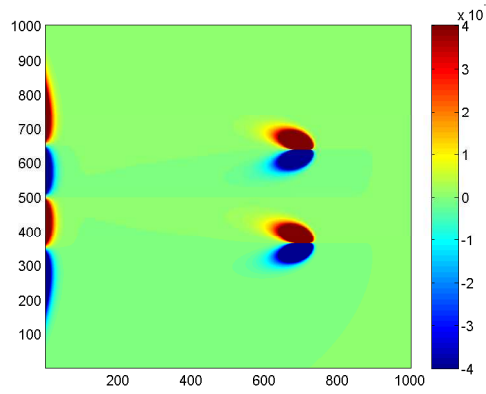


FIGURE 2.9 – Jacobien de  $\psi_K$  avec la source au Sud et le puits au Nord et une intensité de  $10^{-2}$

Les zones où la solution n'est pas valable du fait de l'importance des termes non linéaires se situent autour du puits et de la source ainsi que près des deux couches limites à l'ouest (voir figure 2.9). Plus l'intensité de la source est importante, plus les vitesses dans le bassin sont grandes et par conséquent moins la zone de validité de  $\psi_K$  est grande.

Il devient maintenant intéressant d'adimensionner l'équation (1.16) c'est à dire de regarder quels sont les termes dominants en fonction des paramètres.

## 2.5 Adimensionnement de l'équation

Pour adimensionner l'équation on utilise :

- $x = Lx^*$ ,  $y = Ly^*$
- $\psi = UL\psi^*$
- $T = \beta^{-1}L$  pour l'échelle de temps

l'équation devient :

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \epsilon J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x} + r \nabla^2 \psi = \frac{\text{int}}{\beta U} [\delta(x - x_s) \delta(y - y_s)] \quad (2.10)$$

avec :

$$\epsilon = \frac{U}{\beta L^2} = \left(\frac{\delta_i}{L}\right)^2$$

$$r = \frac{\mu}{\beta L} = \frac{\delta_s}{L}$$

$\delta_i = \sqrt{\frac{U}{\beta}}$  est l'épaisseur de la couche limite inertielle et  $\delta_s = \frac{\mu}{\beta}$  l'épaisseur de la couche limite de Stommel.

### Les différents régimes

Pour  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , généralement  $\delta_s \ll 1$  on peut alors comparer  $\delta_i$  à  $\delta_s$  (on fait varier  $\delta_i$  en modulant l'intensité de la source et du puits) :

- Quand  $\delta_i \ll \delta_s$ ,  $\epsilon \ll 1$  et la solution  $\psi_K$  est valable presque partout.
- Quand  $\delta_i \sim \delta_s$  ou  $\delta_i \gg \delta_s$ , il devient nécessaire de prendre en compte les termes inertiels
- Quand  $\delta_i \sim 1$  ou  $\delta_i \gg 1$  les termes inertiels dominent par rapport aux autres, une solution du type Fofonoff est alors envisageable. Cependant, cette solution nécessite un débit élevé, qui ne correspond plus à de la dynamique des fluides géophysique.

Dans le prochain paragraphe, nous examinerons le cas où  $\delta_i < \delta_s$  plus précisément  $\delta_i$  de l'ordre de  $0.5\delta_s$ .

## 2.6 Recherche d'une solution à l'équation non linéaire dans la couche limite de Stommel

En effectuant un zoom dans la couche de limite de Stommel i.e. en écrivant  $L = \delta_s$  l'équation 2.10 devient

$$\left(\frac{\delta_i}{\delta_s}\right)^2 J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.11)$$

Le partie droite de l'équation est nulle puisqu'il n'y a pas de forçage dans la couche limite.

Pour continuer, on effectue deux hypothèses :

La première consiste à dire que l'échelle selon  $x$  étant beaucoup plus petite que l'échelle selon  $y$ , les variations de  $\psi$  par rapport à  $y$  sont négligeables devant celles qui s'effectuent selon  $x$ , c'est à dire  $\frac{\partial}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial y}$

La deuxième fait l'hypothèse d'un flot zonal avec la valeur de  $u = 1$  pour un flot vers l'est et de  $u = -1$  pour un flot vers l'ouest.

Cette dernière hypothèse nous permet d'écrire que la solution dans la couche limite de Stommel a la forme  $\psi(x, y) = \phi(x)y$ . Avec  $\phi(x) \rightarrow 1$  quand  $x \mapsto \infty$  (on utilise l'équation adimensionnée)

La première permet d'écrire  $\nabla^2 \psi \simeq \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ .

L'équation 2.11 devient alors avec  $\lambda = \frac{\delta_i}{\delta_s}$  :

$$\lambda^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.12)$$

puis,

$$\lambda^2 (\phi' \phi'' - \phi \phi''') + \phi' + \phi'' = 0 \quad (2.13)$$

En intégrant cette équation on obtient :

$$\lambda^2 (\phi'^2 - \phi \phi'') + \phi + \phi' - 1 = 0 \quad (2.14)$$

$$\phi(0) = 0 \quad (2.15)$$

$$\phi(+\infty) = 1 \quad (2.16)$$

On discrétise alors cette équation dans le but de l'intégrer numériquement en utilisant les schémas centrés suivants :

$$-\frac{\phi^{n+1} - \phi^{n-1}}{2\Delta x} = \phi'(n\Delta x) + \sigma(\Delta x)$$

$$-\frac{\phi^{n-1} - 2\phi^n + \phi^{n+1}}{\Delta x^2} = \phi''(n\Delta x) + \sigma((\Delta x)^2)$$

Cette équation n'étant pas linéaire il est compliqué de l'intégrer traditionnellement c'est à dire d'obtenir  $\phi^n$  à partir de  $\phi^{n-1}$  et  $\phi^{n-2}$ . En effet, il faut alors résoudre une équation du second degré pour chaque  $n$  ce qui mène soit à une absence de solution, soit à une solution unique soit à deux solutions distinctes. Cette dernière possibilité entraînant la question du choix entre deux solutions.

Pour éviter ces problèmes on utilisera la méthode de Newton qui permet de résoudre des systèmes non linéaires en "devinant" la solution initiale et en la modifiant jusqu'à ce qu'elle converge. Cette méthode comporte néanmoins quelques inconvénients dont l'impossibilité d'attribuer la non convergence quand elle a lieu à l'absence de solution. Elle nécessite de plus des conditions initiales très proches de la solution finale.

## 2.6.1 Présentation de la méthode de Newton

Le problème à résoudre est le suivant :

Pour  $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , trouver  $x^* \in \mathfrak{R}^n$  tel que  $F(x^*) = 0$ . Pour cela nous avons besoin de la matrice jacobienne de  $F$  que l'on note  $J_F$  et qui vaut :

$$(J_F(x))_{ij} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)(x), i, j = 1, \dots, n$$

la méthode de Newton consiste à résoudre l'équation linéaire suivante :

$$J_F(x^{(k)})\delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

avec  $\delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ . Il faut résoudre un système linéaire de matrice  $J_F(x^{(k)})$  à chaque itération  $k$ . Il existe un théorème qui donne une condition suffisante de convergence[9]. Cependant, pour des raisons de simplicité on préférera tester visuellement si la suite converge plutôt que de montrer théoriquement qu'elle converge.

## 2.6.2 Application à l'équation 2.14

la fonction  $F$  est définie comme suit :

$$F : (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n) \longrightarrow (f_1(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n), \dots, f_n(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n))$$

avec, en utilisant les schémas centrés vus plus haut :

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi^1 \\ \forall j \in \{2, \dots, n-1\}, f_n &= \lambda^2 \frac{\phi^j(\phi^{j-1} - 2\phi^j + \phi^{j+1})}{(\Delta x)^2} - \lambda^2 \left[ \frac{\phi^{j+1} - \phi^{j-1}}{2\Delta x} \right]^2 - \frac{\phi^{j+1} - \phi^{j-1}}{2\Delta x} - \phi^j + 1 \\ f_n &= \phi^n \end{aligned}$$

On calcule facilement la matrice jacobienne grâce aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} j &\in \{2, \dots, n-1\} \\ \frac{\partial f^j}{\partial x_{j-1}} &= \lambda^2 \frac{\phi^n}{(\Delta x)^2} - \lambda^2 \frac{\phi^{n-1} + \phi^n + 1}{2(\Delta x)^2} + \frac{1}{2\Delta x} \\ \frac{\partial f^j}{\partial x_j} &= \lambda^2 \frac{\phi^{n-1} - 4\phi^n + \phi^n + 1}{(\Delta x)^2} - 1 \\ \frac{\partial f^j}{\partial x_{j+1}} &= \lambda^2 \frac{\phi^n}{(\Delta x)^2} - \lambda^2 \frac{\phi^{n-1} + \phi^n + 1}{2(\Delta x)^2} - \frac{1}{2\Delta x} \end{aligned}$$

Il reste à déterminer la solution que l'on va utiliser initialement. Les termes non linéaires sont d'ordre inférieur aux termes linéaires de l'équation 2.14. La solution initiale qui s'impose est par conséquent celle qui résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \phi + \phi' - 1 &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(+\infty) &= 1 \end{aligned}$$

c'est à dire  $\phi_0(x) = 1 - \exp(-x)$ . Où  $\phi_j$  désigne  $\phi$  après  $j$  itérations de la méthode de Newton. On possède maintenant tous les éléments pour calculer la solution en résolvant :

$$J_F(\phi_k^1, \dots, \phi_k^n)(\phi_{k+1} - \phi_k) = -F(\phi_k^1, \dots, \phi_k^n)$$

Le programme Matlab se trouve en annexe.

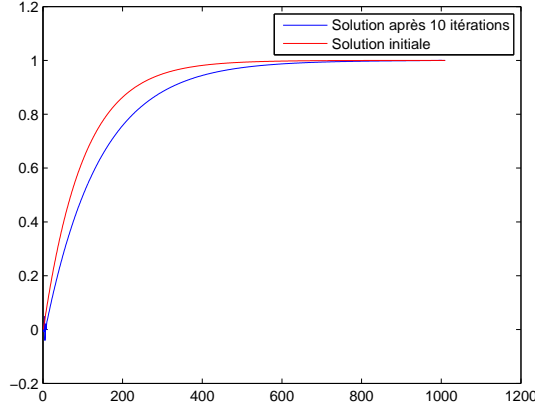


FIGURE 2.10 – Solution obtenue pour un flot entrant dans la couche limite

### 2.6.3 Résultats

#### *u* négatif

Pour  $\lambda^2 = 0.5(\frac{\delta_i}{\delta_s} = \sqrt{0.5} \approx 0.7)$ , on obtient en itérant 10 fois la méthode de Newton et 1000 points la figure 2.10.

Cette solution correspond à un  $\psi_{int} = y$  et donc à une vitesse zonale négative  $u = -1$ . Nous voyons ici que la solution est très sensible aux conditions initiales : en  $x = 0$  des perturbations sont observables. La fonction  $1 - \exp(-x)$  a été dérivée en supposant les termes non linéaires négligeables mais pour  $x$  petit ils ne sont plus négligeables et cette solution initiale n'est donc pas la plus adaptée aux alentours de  $x = 0$ . La solution trouvée montre que pour un flot entrant, les termes non linéaires modifient peu la solution initiale. Elle tend à adoucir légèrement la pente et réduit donc l'intensité de  $v$ .

#### *u* positif

Pour calculer la solution quand  $u$  est positif, il suffit de faire la transformation suivante :  $\lambda^2 \leftarrow -\lambda^2$ . En effet, on se convainc rapidement qu'en remplaçant  $\psi = \phi(x)y$  par  $\psi = -\phi(x)y$  on obtient pour  $\phi$  :

$$\begin{aligned} -\lambda^2(\phi'^2 - \phi\phi'') + \phi + \phi' - 1 &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(+\infty) &= 1 \end{aligned}$$

Pour  $\lambda^2 = 0.5(\frac{\delta_i}{\delta_s} = \sqrt{0.5} \approx 0.7)$ , on obtient en itérant 10 fois la méthode de Newton et toujours avec 1000 points la figure (2.11).

Cette fois ci, les termes non linéaires modifient significativement la solution dans la couche limite. Ils créent une légère oscillation. Cette dernière implique un changement de signe de  $v$  dans la couche limite.

Cette solution pourrait expliquer l'instabilité observée dans un cas et la stabilité dans l'autre. En effet, pour la configuration stable, le flot sortant de la couche limite de Stommel se trouve coincé entre la source et le puits. Il est possible alors que ces perturbations soient stabilisées par le jet vers l'est présent lorsque la source est au Sud. Au contraire, dans la configuration inverse le flot sort au nord et au sud respectivement du puits et de la source et rien n'est là pour le stabiliser.

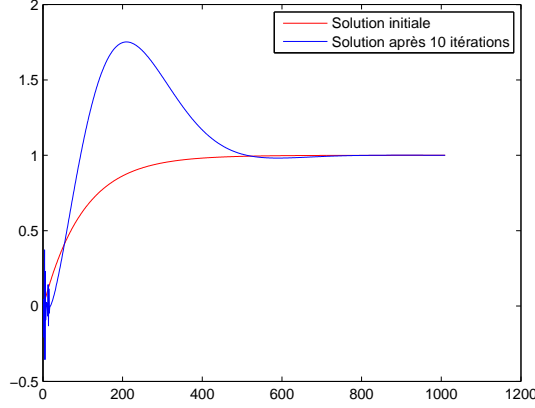


FIGURE 2.11 – Solution obtenue pour un flot sortant de la couche limite.

## 2.7 Ajout des termes inertiels par la méthode des perturbations

### 2.7.1 Présentation de la méthode

L'équation adimensionnelle stationnaire est la suivante :

$$\epsilon J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x} + r \nabla^2 \psi = \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \quad (2.17)$$

L'idée est de développer  $\psi$  selon  $\epsilon$  pour  $\epsilon \ll 1$  c'est à dire d'écrire :

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + o(\epsilon^2)$$

On se limitera par la suite à l'ordre 1. En insérant  $\psi$  dans 2.17, on obtient :

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + r \nabla^2 \psi_0 = \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \quad (2.18)$$

$$\epsilon J(\psi_0, \nabla^2 \psi_0) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + r \nabla^2 \psi_1 = 0 \quad (2.19)$$

L'équation concernant  $\psi_0$  a déjà été résolue plus haut (2.4). Pour trouver  $\psi_1$ , il faut considérer  $\psi_0$  comme étant la fonction de Green du problème et la "convoluer" avec  $-J(\psi_0, \nabla^2 \psi_0)$ . La convolution va en fait consister à sommer des sources (et leurs images) sur tout le domaine en prenant pour intensité la valeur de  $-J(\psi_0, \nabla^2 \psi_0)$  à la position de chacune de ces sources.

### 2.7.2 Résultats

Le programme Matlab qui résout ce problème calcule donc la réponse au forçage pour chacune des sources puis somme le résultat. On obtient ainsi  $\psi_1$  (voir 2.12) pour la source au Sud et le puits au Nord.

En inversant la source et le puits on obtient le même résultat pour  $\psi_1$ . Ceci est dû au fait que  $J(\psi_0, \nabla^2 \psi_0) = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi_0}{\partial y} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi_0}{\partial x}$  ne change pas de signe lorsque l'on inverse le forçage. En effet, inverser le forçage revient pour  $\psi_0$  à le multiplier par (-1). Or  $J(\psi_0, \nabla^2 \psi_0) = J(-\psi_0, -\nabla^2 \psi_0)$ . Selon que l'on ajoute ce terme ( $psi_1$ ) à  $\psi_0$  ou à  $-\psi_0$ , le résultat sera bien évidemment différent. La différence qui nous importe est l'asymétrie créée. En effet avant l'ajout de  $\psi_1$ , nous avons :  $\psi_0^{NS} = -\psi_0^{SN}$  où  $\psi^{NS}$  représente la fonction courant pour une source au Nord et un puits au Sud et  $\psi^{SN}$  la fonction courant pour la configuration inverse. Tandis que maintenant, grâce à au fait que  $\psi_1^{NS} = \psi_1^{SN}$ , nous avons :  $(\psi_0 + \epsilon \psi_1)^{NS} \neq -(\psi_0 + \epsilon \psi_1)^{SN}$ . En prenant  $\epsilon \sim 10^{-4}$  et en sommant  $\epsilon * \psi_1$  avec  $\psi_0$ , on obtient la figure (2.13). Ces deux figures confirment ce que nous avons écrit précédemment, on note que l'asymétrie se fait principalement ressentir près de la source et du puits.

Nous venons donc de voir que l'ajout des termes non linéaires a pour effet d'asymétriser la solution. La question qui vient est alors : quel est l'effet de cette asymétrie sur le mouvement des particules ? Est ce que

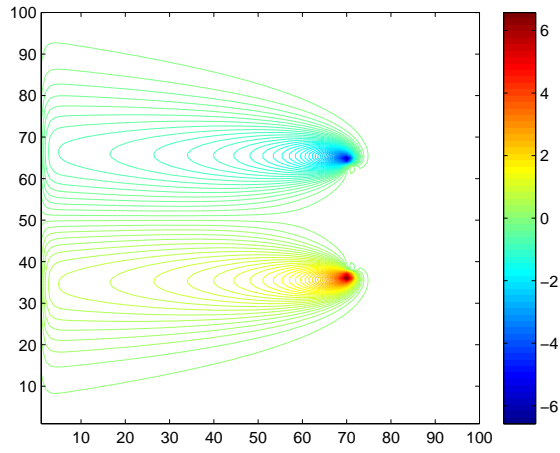


FIGURE 2.12 –  $\psi_1$

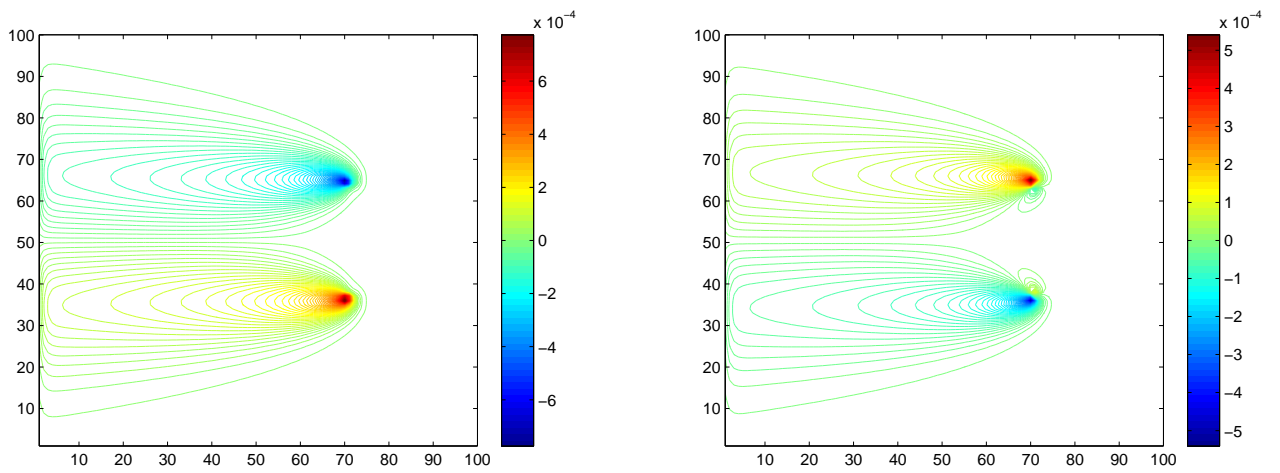


FIGURE 2.13 – à gauche :  $\psi_0 + \epsilon\psi_1$  à droite :  $-\psi_0 + \epsilon\psi_1$

cette différence au niveau du puits et de la source pourrait être à l'origine des instabilités ? Pour essayer d'y voir plus clair nous utiliserons la vorticité potentielle, qui est une quantité conservée de manière lagrangienne. C'est à dire que lors de son cheminement, une particule possède toujours la même quantité de vorticité potentielle. En regardant les lignes d'égale vorticité potentielle on peut donc prédire le trajet des particules.

## 2.8 Vorticité potentielle

Le début de ce paragraphe sera consacré à montrer que la vorticité potentielle est conservée de manière lagrangienne dans la cuve. D'après l'équation (1.7), en négligeant les termes dissipatifs :

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(\zeta + 2\Omega)(\partial_x u + \partial_y v) \quad (2.20)$$

Puis, en utilisant l'équation de la continuité et en intégrant sur la hauteur :

$$(H - \tan \alpha y + \eta) \frac{d\zeta}{dt} = (\zeta + 2\Omega)(w_s - w_f) \quad (2.21)$$

$$(H - \tan \alpha y + \eta) \frac{d\zeta}{dt} = (\zeta + 2\Omega) \frac{d(\eta - \tan \alpha y)}{dt} \quad (2.22)$$

avec  $w_s = \frac{d\eta}{dt}$  et  $w_f = \tan \alpha v = \tan \alpha \frac{dy}{dt}$ . En écrivant  $h = H + \eta - \tan \alpha y$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\zeta + 2\Omega}{h} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Qui est la conservation de la vorticité potentielle shallow water. Maintenant, en écrivant  $h = H(1 + \frac{\eta}{H} - \frac{\tan \alpha}{H} y)$  et en considérant que  $\frac{\eta - \tan \alpha}{H} y \ll 1$  on obtient :

$$q \sim \frac{1}{H} (2\Omega + \zeta) \left(1 - \frac{\eta}{H} + \frac{\tan \alpha}{H} y\right) \sim \frac{1}{H} \left(2\Omega + \frac{2\Omega \tan \alpha}{H} y + \zeta - 2\Omega \frac{\eta}{H}\right) \quad (2.24)$$

Le terme  $\frac{2\Omega}{H}$  étant une constante, il n'a pas d'influence sur l'évolution de l'équation. Ainsi la quantité  $q = \beta y + \zeta - 2\Omega \frac{\eta}{H}$  est conservée de manière lagrangienne (avec  $\beta = \frac{2\Omega \tan \alpha}{H}$ ). On peut obtenir  $q$  en fonction de la seule variable  $\psi$  en utilisant le fait que  $\zeta = \nabla^2 \psi$  et  $\eta = \frac{2\Omega \psi}{g}$  :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \beta y + \nabla^2 \psi - \frac{1}{L_d^2} \psi = 0 \quad (2.25)$$

où  $L_d = \frac{\sqrt{gH}}{2\Omega}$ . On dessine alors la vorticité potentielle pour  $\psi_0 + \epsilon \psi_1$  et  $-\psi_0 + \epsilon \psi_1$ . (voir figure (2.14)). Les deux figures ne nous permettent pas de déduire la stabilité dans un cas ou dans l'autre. Mais on peut cependant faire quelques remarques sur ces résultats. Comme pour la fonction courant l'asymétrie principale se situe au niveau de la source et du puits. On note cependant qu'au niveau de la couche limite ouest la vorticité potentielle est dans le cas source au Sud advectée vers le centre et dans l'autre cas advectée vers l'extérieur. Ces asymétries font de ces deux zones des candidates à l'origine des instabilités.

Pour appuyer l'intérêt de ce paragraphe, le prochain paragraphe montrera que l'examen des équations du mouvement fait ressortir son importance dans la stabilité de la solution. De plus, nous verrons par la suite que la vorticité potentielle nous permettra, grâce aux résultats du modèle numérique, de déterminer l'origine des instabilités.

### 2.8.1 Importance de la vorticité potentielle dans les critères de stabilité

Dans ce paragraphe, on écrira  $\psi$  comme étant la somme de la solution que nous avons trouvée précédemment, que nous noterons  $\bar{\psi}$  et d'un terme perturbatif  $\psi'$ . C'est à dire :

$$\psi = \bar{\psi} + \psi'$$

Nous considérons la solution précédente comme l'état de base, et  $\psi'$  comme la perturbation à étudier pour connaître la stabilité du flot. En insérant ce  $\psi$  dans l'équation de vorticité (1.16) et en négligeant les termes dus à l'élévation de la surface libre, on obtient dans un premier temps :

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \nabla^2 \bar{\psi}) + J(\psi', \nabla^2 \psi') + J(\bar{\psi}, \nabla^2 \psi') + J(\psi', \nabla^2 \bar{\psi}) + \beta \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{\psi} + \mu \nabla^2 \psi' = \text{Forçage}$$

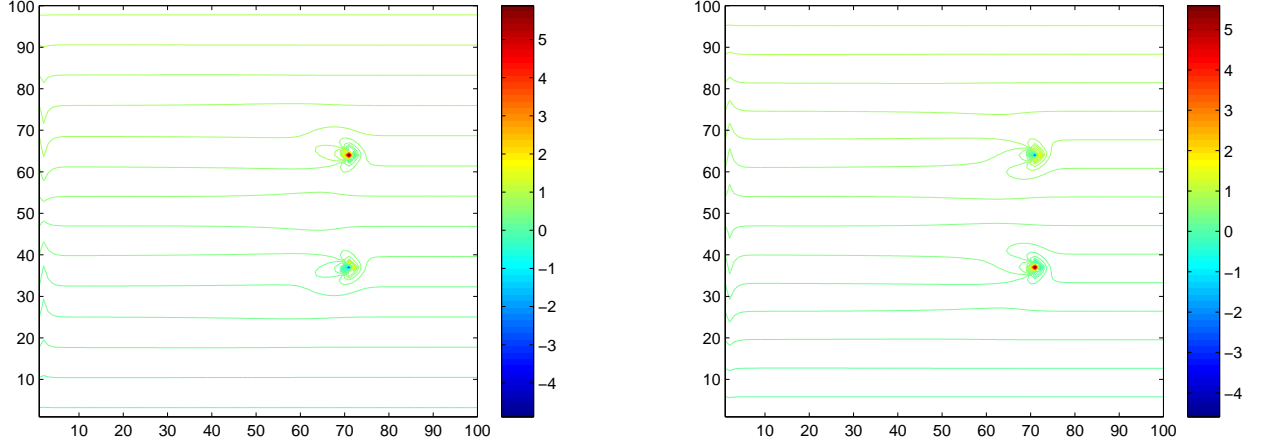


FIGURE 2.14 – Vorticité potentielle dans le cas source Sud (gauche) et source Nord (droite)

En retirant le terme non linéaire ( $J(\psi', \nabla^2 \psi')$ ) et en utilisant le fait que  $\bar{\psi}$  est la solution de  $J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \nabla^2 \psi = \text{Forçage}$  (en effet,  $J(\bar{\psi}, \nabla^2 \bar{\psi}) \approx 0$  si on utilise la correction  $\psi_1$  et si le forçage est faible), on simplifie alors :

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \nabla^2 \psi') + J(\psi', \nabla^2 \bar{\psi}) + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \mu \nabla^2 \psi' = 0 \quad (2.26)$$

Qui peut être réarrangé comme suit :

$$\frac{d \nabla^2 \psi'}{dt} + J(\psi', \nabla^2 \bar{\psi} + \beta y) + \mu \nabla^2 \psi' = 0 \quad (2.27)$$

Où  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \cdot)$  représente l'advection par le flot de base.

C'est une équation locale, la stabilité ne peut donc pas en être déduite mais elle montre cependant que la quantité  $\nabla^2 \bar{\psi} + \beta y$  est importante dans l'étude de la stabilité de la solution.

Nous avons mis en évidence dans ce chapitre trois zones potentiellement instables : la couche limite à l'Ouest, le jet entre la source et puits et le puits et la source eux mêmes. Pour connaître quelles sont effectivement les zones à l'origine de l'instabilité observée lors des expériences en cuve, nous allons utiliser un modèle numérique : le modèle MICOM.

## Chapitre 3

# Etude des résultats du modèle numérique.

Le modèle MICOM ou Miami Isopycnic Coordinate Ocean Model en Anglais est un modèle d'intégration des équations primitives qui régissent l'évolution du moment, de la masse, de la chaleur et du sel dans l'océan. Il a été adapté à notre problème (une seule couche,  $\rho, S, T$  constants) par Steven Herbette.

Plusieurs runs ont été lancés en faisant varier les paramètres suivant : l'intensité, l'écartement entre le puits et la source ainsi que la position respective de ces dernières. L'objectif de cette étude est premièrement de déterminer l'origine des instabilités et deuxièmement de comprendre l'effet des paramètres décrits précédemment sur la solution.

### 3.1 Origine des instabilités

Nous avons dans la dernière partie fait 3 hypothèses quant à l'origine des instabilités : la couche limite, le jet ou la source et le puits. Les résultats permettent de trancher rapidement : la source et le puits sont les responsables de la stabilité dans le bassin. Pour s'en convaincre on peut regarder les figures en (3.1) qui représentent la vorticité potentielle . Les deux sont réalisées avec une intensité de 100ml par minute et avec le même écartement (0.1 mètre) , seule la position de l'une par rapport à l'autre change.

Dans le cas où la source est au Sud, le flot devient stable après quelques temps. On observe alors une anomalie de vorticité potentielle au sud de la source et au nord du puits. Dans la configuration inverse, le flot est instable : des tourbillons se détachent continuellement de la source et du puits et sont advectés vers l'ouest par le jet. La friction étant proportionnelle à la vorticité, elle est importante au niveau de ces tourbillons et à

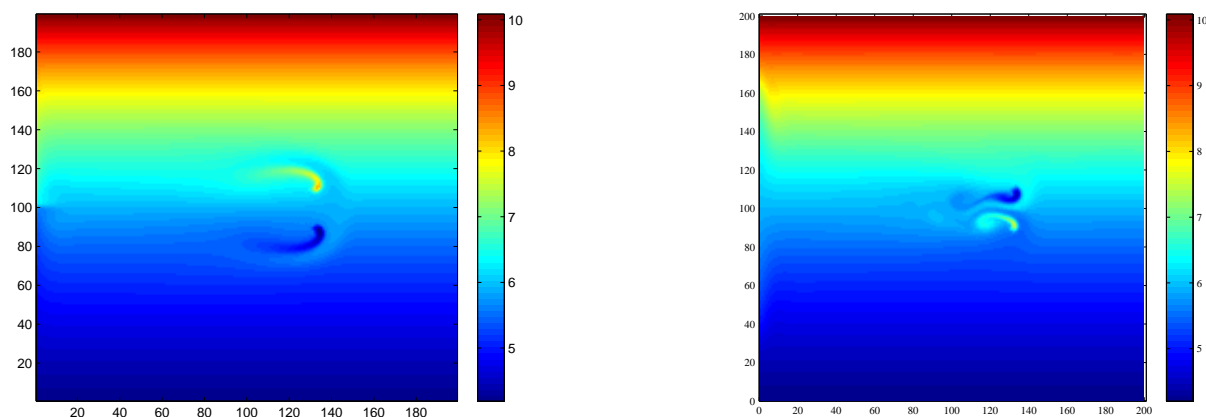


FIGURE 3.1 – Vorticité potentielle dans le cas stable (gauche) et instable (droite) pour une intensité de  $q=100$ ml par min

environ mi-chemin entre le bord ouest et l'abscisse de la source et du puits, ils sont dissipés. En faisant varier les paramètres du problème, le rôle que jouent la source et le puits dans la stabilité reste toujours prépondérant par rapport aux 2 autres zones indiquées plus haut. La question que l'on se pose est alors : quels sont les effets des paramètres de ces sources ou puits sur la stabilité ?

## 3.2 Variation des paramètres et stabilité

On commencera par étudier le résultat d'un forçage faible avec une intensité de l'ordre de 10ml par minute, puis un forçage élevé de l'ordre de 500ml par minute et enfin nous regarderons l'effet d'un forçage intermédiaire : 100 ml par minute.

### 3.2.1 Forçage faible : $q=10\text{ml}/\text{min}$

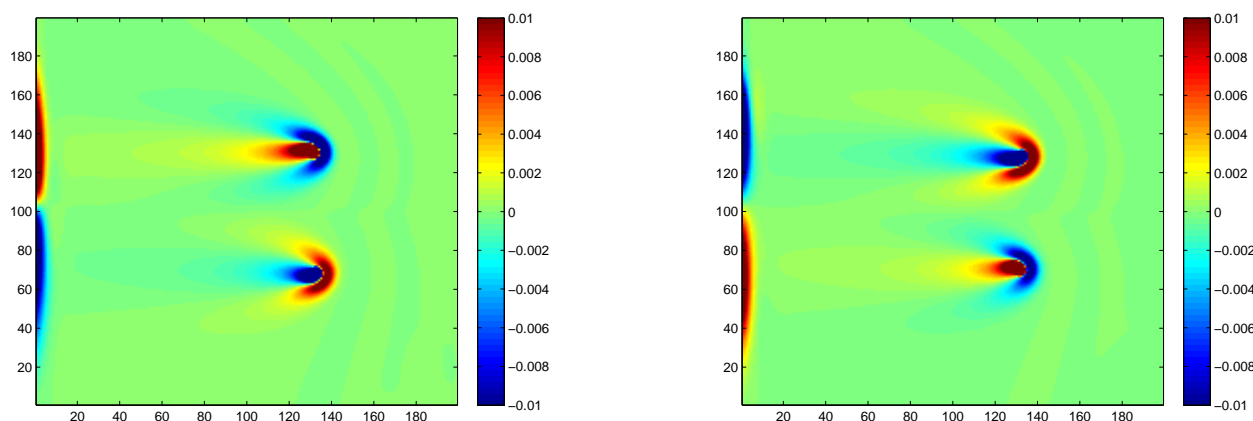


FIGURE 3.2 – Vorticité relative pour une source au nord (gauche) et une source au sud (droite) avec  $q=10\text{ml}$  par min et un écartement de  $0.3\text{m}$

Le forçage étant faible, il est nécessaire de dessiner la vorticité relative plutôt que la vorticité potentielle pour pouvoir connaître son évolution. C'est ce que nous avons fait figure (3.2). En comparant avec la vorticité relative calculée à partir de la solution analytique dérivée plus haut (2.4), on se rend compte que l'on obtient des figures similaires (3.3). Cette solution analytique étant calculée en négligeant les termes non linéaires, on peut supposer que ces termes ont peu d'importance pour une intensité égale ou inférieure à 10 ml par minutes. De plus, la solution est stable dans les deux configurations et elle reste stable pour une distance source puits plus faible (distance =  $0.1\text{m}$ ). Nous avons donc ici confirmation que les termes non linéaires sont à l'origine des instabilités.

### 3.2.2 Forçage élevé : $q=500\text{ml}/\text{min}$

Nous avons observé dans la partie (2.4) que plus l'intensité était élevée plus les termes non linéaires étaient importants. Pour une intensité de  $500\text{ml}/\text{min}$ , les effets non linéaires sont donc prépondérants. On peut s'en convaincre rapidement en regardant la figure (3.4). De ceci on déduit que pour une intensité supérieure ou égale à  $500\text{ml}/\text{min}$  (toujours à friction égale), d'une part les termes non linéaires seront toujours très importants et d'autre part la solution ne sera jamais stable.

Ces deux intensités de forçage  $10\text{ml}$  et  $500\text{ml}$  définissent des limites à partir desquelles les termes non linéaires sont respectivement négligeables ou prépondérants. Passons maintenant au forçage intermédiaire :  $100\text{ml}/\text{min}$ .

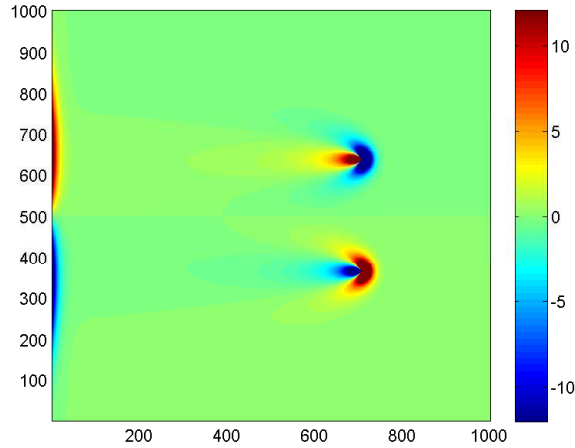


FIGURE 3.3 – Vorticité à partir de la solution analytique pour  $\text{int} \sim 10^{-2}$  et une source au Nord

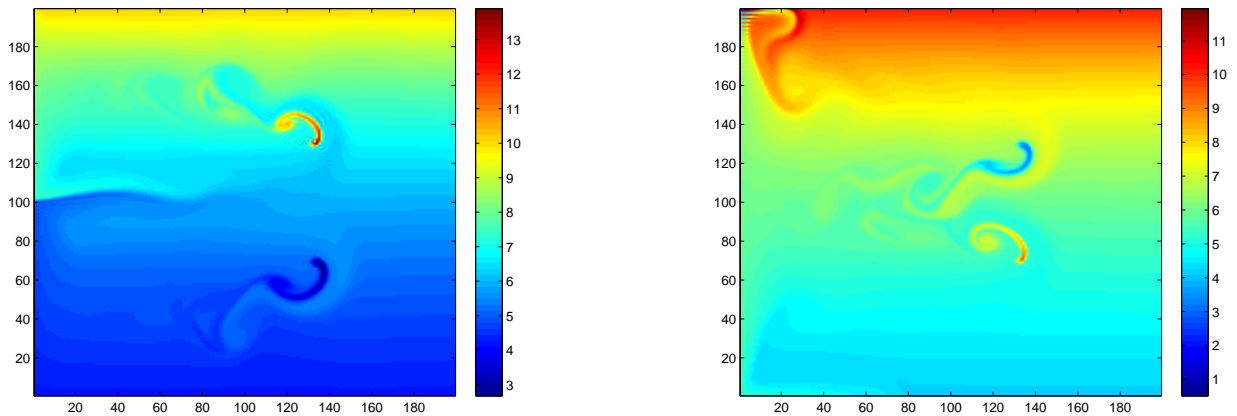


FIGURE 3.4 – Vorticité potentielle pour une source au nord (gauche) et une source au sud (droite) avec  $q=500\text{ml}$  par min et un écartement de  $0.3\text{ m}$

### 3.2.3 Forçage intermédiaire : $q=100\text{ml}/\text{min}$

Le cas intéressant est donc celui qui possède un forçage intermédiaire, situé entre un forçage fort qui n'est jamais stable et un forçage trop faible, toujours stable. La valeur de  $100\text{ml}/\text{min}$  semble bien correspondre à ce forçage comme peut en attester la figure (3.1) qui montre un cas stable et un cas instable. En éloignant la source et le puits, on arrive à la solution dessinée figure (3.5). Sur la figure de gauche, représentant la configuration censée être instable, le flot est stable. L'agrandissement de la distance entre la source et le puits a donc eu comme conséquence la stabilisation du flot. Sur la figure de droite le flot reste stable.

Pour tenter de comprendre l'origine de ce phénomène, on dessine la vitesse  $u$  figures (3.6) et (3.7) pour chaque cas ( un écartement petit ( $0.1\text{m}$ ) et un écartement grand ( $0.3\text{m}$ )). Quand l'écartement est petit, la vitesse  $u$  est plus élevée entre le puits et la source que lorsque l'écartement est grand. C'est cette intensité de la vitesse  $u$  qui constitue le changement le plus évident lorsque l'on rapproche les deux zones de forçage (mis à part le rapprochement lui même).

Les dessins de la figure (3.8) montrent la vitesse  $u$  moyennée sur  $x_s - 0.1 < x < x_s$  dans le cas où la source est au Nord et pour un écartement grand et petit. Ces dessins de la moyenne de  $u$  nous montrent que l'existence du jet vers l'est ou vers l'ouest est conditionnée par une distance au moins inférieure à  $0.3\text{m}$  (pour une intensité de  $100\text{ml}$  par min). Ces dessins de la moyenne de  $u$  de l'endroit d'où semble provenir les instabilités vont nous permettre dans la prochaine partie de rechercher une condition nécessaire d'instabilité.

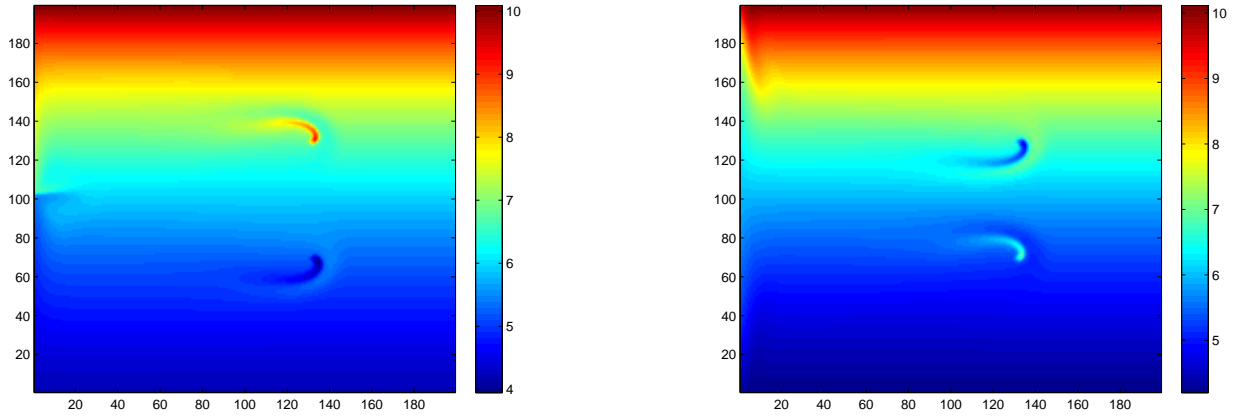


FIGURE 3.5 – Vorticité potentielle pour une source au nord (gauche) et une source au sud (droite) avec  $q=100\text{ml}$  par min et un écartement de  $0.3\text{ m}$

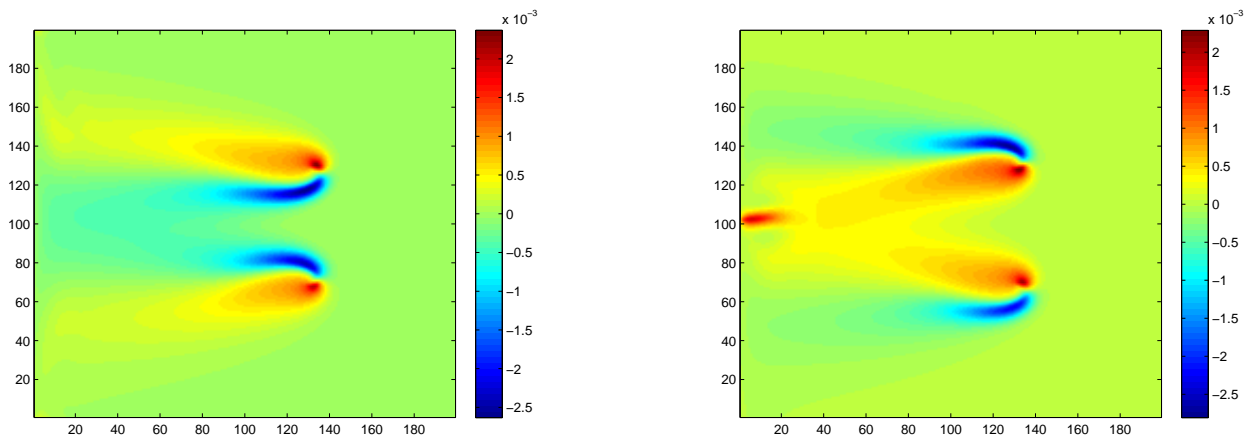


FIGURE 3.6 –  $U$  pour une source au nord (gauche) et une source au sud (droite) avec  $q=100\text{ml}$  par min et un écartement de  $0.3\text{ m}$

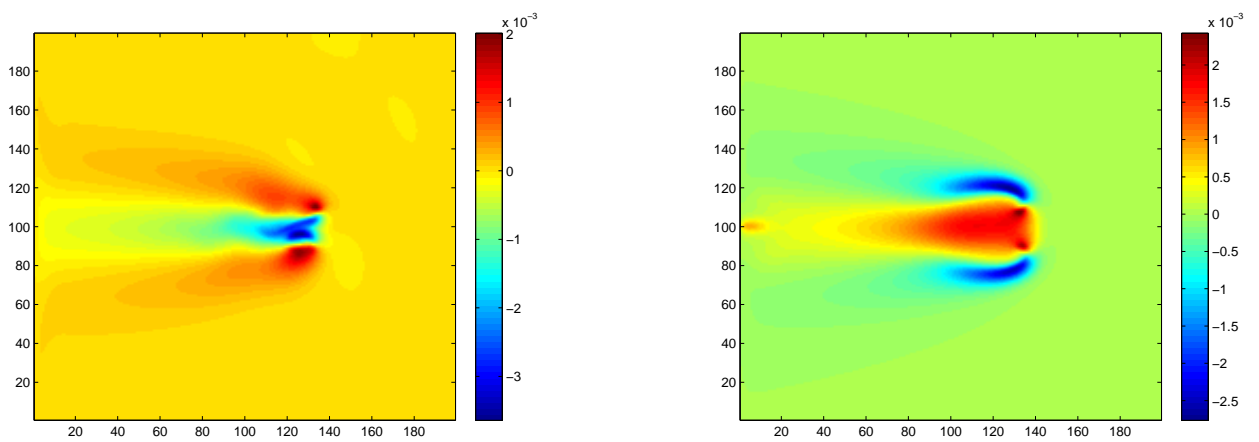


FIGURE 3.7 –  $U$  pour une source au nord (gauche) et une source au sud (droite) avec  $q=100\text{ml}$  par min et un écartement de  $0.1\text{ m}$

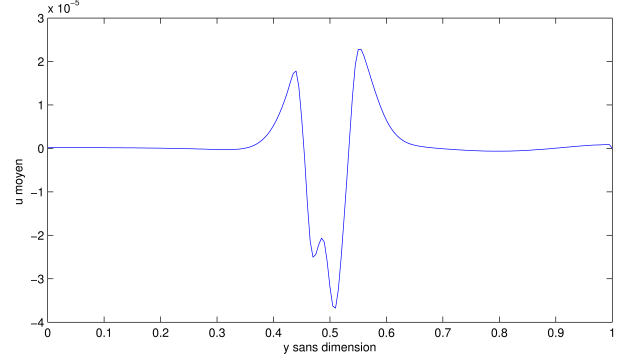
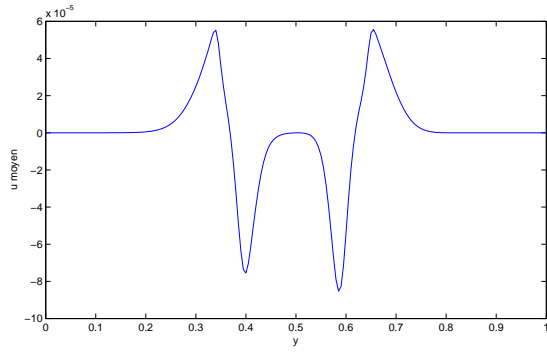


FIGURE 3.8 –  $U$  moyen dans le cas d’une source au Nord pour  $x_s - 0.1 < x < x_s$   $q=100\text{ml/min}$ , un écartement de 0.3m (gauche) et un écartement de 0.1m (droite)

### 3.2.4 Recherche d’une condition nécessaire d’instabilité pour le forçage intermédiaire

On supposera dans cette partie que le flot est majoritairement zonal près de la source et du puits. On peut alors employer la condition déjà utilisée plus haut (2.5) qui nous a permis d’étudier la stabilité du jet zonal créé par la solution de l’équation linéaire et stationnaire. Cette condition est :

$$\frac{d^2U}{dy} - \beta = 0 \quad (3.1)$$

Il faut tout d’abord calculer la valeur de  $\beta$  avec les données utilisées lors des runs.  $H \sim 0.22$  mètre,  $\alpha = 10$

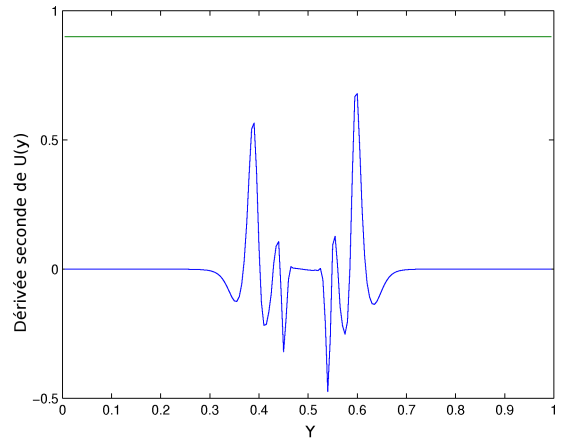
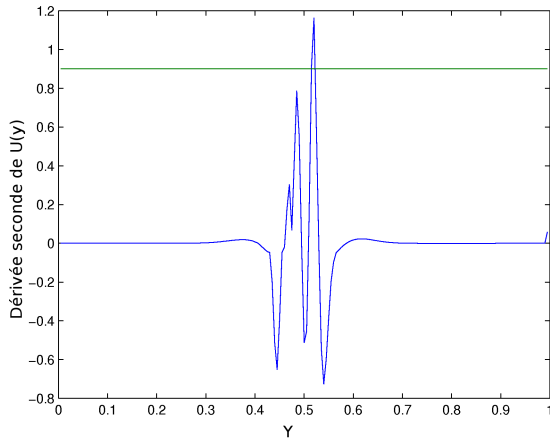


FIGURE 3.9 –  $\frac{d^2U}{dy}$  pour une source au nord (gauche) et une source au sud (droite) avec  $q=100\text{ml par min}$  et un écartement de 0.1 m. En vert :  $\beta \sim 0.9$

degrés et  $\Omega = \frac{2\pi}{10}$ .  $\beta = \frac{2\Omega}{H} \tan(\alpha) \sim 0.9$  On dérive ensuite deux fois par rapport à  $y$  les valeurs de  $U$  moyennées à l’aide d’un schéma centré du second ordre ( $\psi'' = \frac{\psi^{n-1} - 2\psi^n + \psi^{n+1}}{(\Delta y)^2}$ ). Puis on compare les résultats obtenus. Les figures des résultats se trouvent en (3.9) et (3.10) Sur toutes les figures nous avons représenté la ligne  $\beta = 0.9$ . Lorsque la dérivée seconde de  $U$  recoupe cette ligne alors la condition nécessaire d’instabilité est vérifiée. Pour ces 4 figures seule celle qui correspond à un écartement grand et une source au Nord vérifie cette condition nécessaire. Cette figure correspond aussi à la seule configuration instable (voir figure (3.5)). Que peut-on déduire de ce résultat ?

Lorsque le flot est instable, la vitesse  $u$  moyennée à l’ouest de la source et du puits vérifie une condition d’instabilité de flot zonal.

On peut alors conclure cette dernière partie en écrivant que dans la configuration source au Nord, mis à part l’intensité du forçage, la distance entre la source et le puits semble jouer un rôle important dans la stabilité du phénomène.

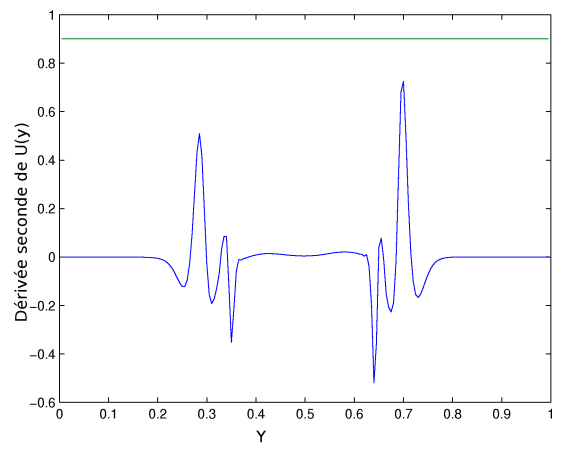
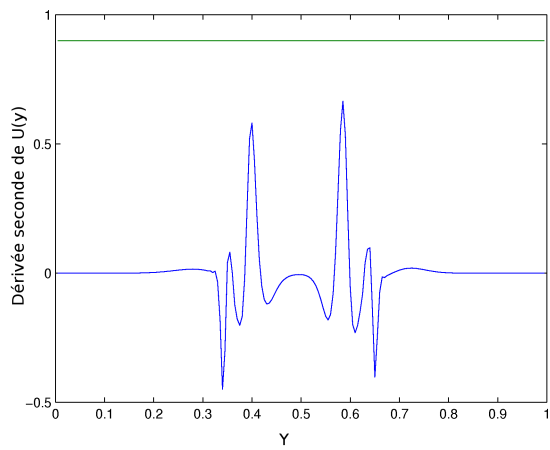


FIGURE 3.10 –  $\frac{d^2U}{dy^2}$  pour une source au nord (gauche) et une source au sud (droite) avec  $q=100\text{ml par min}$  et un écartement de  $0.3\text{ m}$

# Conclusion et perspectives

Dans les parties précédentes, nous avons dérivé l'équation qui régit le mouvement dans la cuve puis trouvé une solution à l'équation linéaire et stationnaire. Après quelques approximations la solution a pu être mise sous la forme d'une solution intérieure et d'une solution de couche limite, ceci dans le but de mieux comprendre l'effet des différents termes présents dans la solution.

A partir de cette solution  $\psi$ , le calcul des vitesses, et de l'élévation de la surface libre est aisément réalisable. Puis, après avoir noté que la principale différence entre la configuration source au Nord et source au Sud était le signe de la vitesse entre les deux zones de forçage, nous avons ajouté l'effet des termes non linéaires de deux façons différentes :

- Tout d'abord dans la couche limite de Stommel à l'ouest : les termes non linéaires changent le signe de la vitesse  $v$  quand le flot est sortant, alors qu'ils n'influencent pratiquement pas le flot entrant.
- Ensuite, en écrivant la solution comme  $\psi_0 + \epsilon\psi_1$  où  $\psi_0$  est la solution de l'équation linéaire, on a pu apporter une correction aux termes non linéaires. Cette correction est bien entendu valable lorsque  $\epsilon \ll 1$  c'est à dire pour des termes non linéaires faibles et donc un forçage faible.

Enfin, dans la dernière partie, les résultats du modèle numérique nous ont permis de repérer l'origine des instabilités ainsi que leurs zones d'influence. En effet les résultats analysés pour différentes intensités, plusieurs distances d'écartement source puits et pour une source au Nord ou au Sud montrent que les lieux de départ des instabilités sont précisément la source et le puits.

Nous avons ensuite montré grâce aux runs à notre disposition que, à friction fixée, pour des intensités supérieures à 500 ml/min (il est fortement probable que la limite se situe entre 100ml/min et 500ml/min) le flot était instable. Tandis que pour des intensités inférieures à 10ml/min le flot était stable.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux runs effectués avec une intensité de 100ml/min, ces derniers correspondent aux observations effectuées en cuve par Alain Colin de Verdière.

Dans la configuration instable (source au Nord), il existe un écartement limite entre la source et le puits à partir duquel le flot devient stable, tandis que le flot est toujours stable dans la configuration stable (source au Sud). Nous avons ensuite regardé si en moyennant la vitesse  $u$  aux environs de l'abscisse de la source et du puits, le flot satisfaisait une condition nécessaire d'instabilité pour un flot zonal. Les résultats montrent que lorsqu'il y a effectivement instabilité, cette condition nécessaire d'instabilité est vérifiée alors qu'elle ne l'est pas dans les autres cas.

De nombreuses questions restent toutefois en suspens. La première d'entre elles étant : comment le fluide passe de la source au puits ? Une analyse des runs numériques avec traceurs devrait permettre d'y répondre. L'existence d'une distance limite à partir de laquelle la configuration source nord devient stable a été mise en évidence. Il serait intéressant de déterminer cette valeur numériquement. Les limites 500ml/min et 10ml/min sont très larges. Il serait bien dans un éventuel travail futur de les préciser. Bien que ce soit peut être utopique, trouver une condition suffisante et nécessaire d'instabilité théoriquement serait aussi un grand pas vers la compréhension du mécanisme.

# Bibliographie

- [1] Abramowitz and Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series - 55, 1970.
- [2] Benoit Cushman-Roisin. *Introduction to geophysical fluid dynamics*. International geophysics series, 2010.
- [3] Anne Fouilloux and Patrick Corde. *Langage Fortran*. IDRIS, 2006.
- [4] Adrian E. Gill. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. International geophysics series, 1982.
- [5] James R. Holton. *An introduction to dynamic Meteorology*. International geophysics series, 1979.
- [6] Morse and FeshBach. *Methods of theoretical physics*. Mc Graw-Hill Book company, 1953.
- [7] Joseph Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1986.
- [8] Joseph Pedlosky. *Ocean Circulation Theory*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 1996.
- [9] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Méthodes numériques pour le calcul scientifique : Programmes en MATLAB*. Springer, 2000.
- [10] G. K. Vallis. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2006.

## Annexe A

# Solution de Stommel

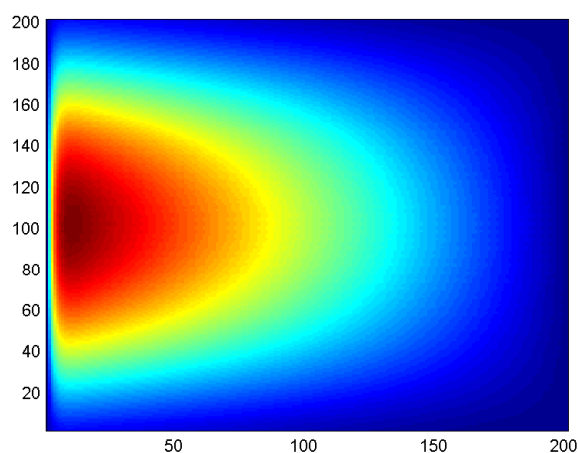


FIGURE A.1 – Solution de Stommel retrouvée à partir de  $K_0$  pour un gradient de vent en  $\sin(\pi y)$

On peut grâce à la solution  $K_0$  retrouver la solution de Stommel. En effectuant la convolution de  $K_0$  avec  $\sin(\pi y)$  on obtient la figure en (A.1). Le programme pour faire ce calcul est le suivant :

```
alpha=10;%angle de la pente av l'horizontal
H=0.22;%hauteur d'eau
Omega=0.62;%norme du vecteur rotation
Beta=2.*Omega.*tan(alpha*pi/180)./(H);
mu=1e-2;
lambda=Beta/(2*mu);

pas=0.005;
X=0:pas:1;
Y=0:pas:1;
[x,y]=meshgrid(X,Y);

int=1e-3;
tot=zeros(1/pas+1);

for xs=pas/2:pas:1-pas/2
    for ys=pas/2:pas:1-pas/2
```

```
R1=(x-xs).^2+(y-ys).^2;
R2=(x+xs).^2+(y-ys).^2;
phi=sin(pi*ys).*exp(lambda.*(xs-x)).*(besselk(0,lambda.*R1.^(1/2))-...
besselk(0,lambda.*R2.^(1/2)));%source

tot=tot+phi;
    end
end
```

## Annexe B

# Programme calculant la solution non linéaire dans la couche limite de Stommel

```
%%
%%Définition des constantes
N=1000;%nombre de points
xpas=10/N;%10: taille du domaine
J=zeros(N-1,N);%matrice jacobienne
lambda=-0.5;
phi=zeros(N+10,1);%en + infini, phi doit être égal à 1.
phi(end-9:end)=ones(10,1);%on impose donc 1 pour les 10 derniers points de phi
F=zeros(N-1,1);
nbiter=10;%nombre d'itérations de la méthode de Newton
%%Solution initiale:
for i=2:N
    phi(i)=1-exp(-(i-1)*xpas);
end

%%
dfmoinsun=inline('y/xpas-(x-z)/(2*xpas)+1/(2*lambda)','x','y','z','xpas','lambda');

dfm=inline('(x-4*y+z)/xpas-xpas/lambda','x','y','z','xpas','lambda');

dfmplusun=inline('y/xpas+(x-z)/(2*xpas)-1/(2*lambda)','x','y','z','xpas','lambda');

f=inline('y*(x-2*y+z)/xpas-(x-z)^2/(4*xpas)-(z-x)/(2*lambda)+...
xpas/lambda-y*xpas/lambda','x','y','z','xpas','lambda');
%%
for j=1:nbiter
%calcul de la matrice jacobienne
for m=2:(N)
    J(m-1,m-1)=dfmoinsun(phi(m-1),phi(m),phi(m+1),xpas,lambda);
    J(m-1,m)=dfm(phi(m-1),phi(m),phi(m+1),xpas,lambda);
    J(m-1,m+1)=dfmplusun(phi(m-1),phi(m),phi(m+1),xpas,lambda);
end

%Calcul de F
```

```
J(:,end)=[];  
  
for i=2:N  
    F(i-1)=f(phi(i-1),phi(i),phi(i+1),xpas,lambda);  
end  
  
phi(2:end-9)=phi(2:end-9)-J\F;  
end
```

## Annexe C

# Programme résolvant l'équation linéaire numériquement

Le programme suivant (en Fortran) résout l'équation linéaire en inversant une matrice avec  $N^4$  éléments où  $N$  est le nombre de points de la grille.

```
program calceqlineaire
implicit none
  real :: r,xs,ys,yp,pas,aa,Nbis,tot,intq
  integer, parameter :: N=110!nombre de points
  integer :: is,ip,js,nv,kl,ku,i,j,i1,j1,irsis
  real, dimension(N*N,N*N) :: A
  real, dimension(N*N) :: D
  real :: b,c1,c2,c3,c4,c5
  integer :: ii,jj,nc,m,n1i,n2i,n3i,n4i,n5i,INFO,ni
  integer :: nouvdim
  real, dimension((N-2)**2,(N-2)**2) :: Anew
  real, dimension((N-2)**2) :: Dnew
  integer, dimension((N-2)**2) :: IPIV
  real,dimension(N,N) :: psi
! IPIV,INFO :variables nécessaires pour résoudre le sys lineaire avec SGESV
  tot=1
  nouvdim=N-2
  Nbis=N
  pas=1/Nbis
  D=0.
  A=0.
  xs=0.6!position de la source
  ys=0.4
  r=0.01 !terme de frottement sur le sol
  yp=1.-ys!position du puits
  is=N*ys
  ip=N*yp
  js=N*xs
  aa=r/(pas**2)
  b=0.1/(2*pas)
  c1=b+aa
  c2=-b+aa
  c3=-4*aa
  c4=aa
  c5=aa
  F=0
```

```

        intq=1!intensité de la source et du puits
! calcul de la solution sans les termes non lineaires
        do ii=2,(N-1)
            do jj=2,(N-1)
                nc=(ii-1)*N
                m=(ii-1)*N+jj
                n1i=nc+jj+1
                n2i=nc+jj-1
                n3i=nc+jj
                n4i=(ii-2)*N+jj
                n5i=ii*N+jj
                A(m,n1i)=c1
                A(m,n2i)=c2
                A(m,n3i)=c3
                A(m,n4i)=c4
                A(m,n5i)=c5
            end do
        end do
! source en is,js puit en ip, js

        D((is-1)*N+js)=1*intq
        D((ip-1)*N+js)=-1*intq

! on enlève les zéros de A et D pour resoudre le systeme lineaire

        do i1=1,N-2

            do j1=1,N-2

                Anew((N-2)*(i1-1)+1:(N-2)*i1,(N-2)*(j1-1)+1:(N-2)*j1)=&
&A(N*i1+2:N*(i1+1)-1,N*j1+2:N*(j1+1)-1)

            end do

            Dnew((N-2)*(i1-1)+1:(N-2)*i1)=D(N*i1+2:N*(i1+1)-1)

        end do

! resolution du systeme lineaire Anew*X=Dnew

        call SGESV(nouvdim**2,1,Anew,nouvdim**2,IPIV,Dnew,nouvdim**2,INFO)

        do m=2,N-1
            psi(m,2:N-1)=Dnew(((N-2)*(m-2)+1):((N-2)*(m-1)))
        end do
OPEN ( UNIT =1,          &
      FILE ="psi",      &
      FORM ="formatted", &
      ACCESS ="sequential", &
      STATUS ="replace", &
      ACTION ="write",   &
      POSITION ="rewind",  &
      IOSTAT =irsis )

```

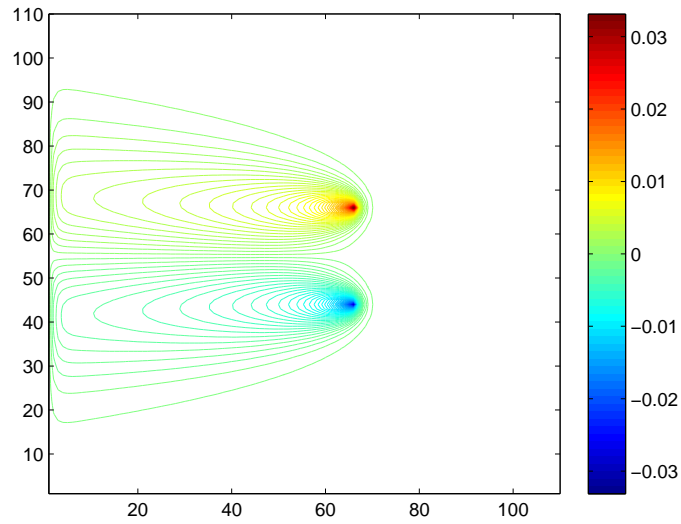


FIGURE C.1 – Résultat de l'intégration numérique de l'équation linéaire avec une source au Sud

```
WRITE(1,*) psi
close( unit=1)
```

Le programme écrit dans un fichier la matrice psi, on utilise ensuite Matlab pour le visualiser. la figure (C.1) est obtenue pour  $x_s = 0.6$ ,  $y_s = 0.4$   $r = 0.001$ ,  $int=1$  et  $Beta = 0.1$ .

## Annexe D

# Programme calculant la correction due aux termes non linéaires

Pour calculer cette correction, nous avons besoin du jacobien de  $\psi_K$  et  $\nabla^2\psi_K$  c'est à dire de :

$$J(\psi_K, \nabla^2\psi_K) = \frac{\partial\psi_K}{\partial x} \frac{\partial\nabla^2\psi_K}{\partial y} - \frac{\partial\psi_K}{\partial y} \frac{\partial\nabla^2\psi_K}{\partial x}$$

Plutôt que de le calculer numériquement, pour plus de précision nous allons dériver les formules analytiques et ceci grâce au logiciel Mathématique. Ces formules sont incluses dans le programme suivant qui calcule la correction des termes non linéaires :

```
alpha=10;%alphamax=12
H=0.22;
Omega=0.62;
Beta=2.*Omega.*tan(alpha*pi/180)./(H);
eps=1;%deltai au carre

mu=1e-2;

lambda=Beta/(2*mu);
xs=0.7036;%position de la source
ys=0.3636;
yp=1-ys;%position puits
yi=-ys;
pas=0.005;
X=0:pas:1;
Y=0:pas:1;
[x,y]=meshgrid(X,Y);
X1=-pas/2:pas:1+pas/2;%pas décalé pour plus de précision
Y1=0:pas:1;
[x1,y1]=meshgrid(X1,Y1);
int=1e-4;%M=int/(L^2*Beta)

n=1/pas;
%calcul du laplacien de psik
laplace1=exp(-lambda.*(-xs+x1)).*lambda.^2.*...
(besselk(0,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))-...
besselk(0,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))-besselk(0,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2))...
+besselk(0,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))-2.*exp(-lambda.*(-xs+x1)).*lambda.*...
(-((lambda.*(-xs+x1)).*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))))./...
```

```

sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)+...
(lambda.*(xs+x1).*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/...
sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)+...
(lambda.*(-xs+x1).*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/...
sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)-...
(lambda.*(xs+x1).*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/...
sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)+...
exp(-lambda.*(-xs+x1)).*((lambda.*(-xs+x1).^2.*...
besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2).^(3./2)...
-(lambda.*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)...
-(lambda.*(xs+x1).^2.*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/...
((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2).^(3./2)...
+(lambda.*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)...
-(lambda.*(-xs+x1).^2.*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/...
((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2).^(3./2)...
+(lambda.*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)...
+(lambda.*(xs+x1).^2.*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/...
((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2).^(3./2)...
-(lambda.*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)...
-(lambda.^2.*(-xs+x1).^2.*(-besselk(0,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))...
-besselk(2,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/((2.*((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))...
+(lambda.^2.*(xs+x1).^2.*(-besselk(0,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))...
-besselk(2,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/((2.*((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))...
+(lambda.^2.*(-xs+x1).^2.*(-besselk(0,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2))...
-besselk(2,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/((2.*((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2))...
-(lambda.^2.*(xs+x1).^2.*(-besselk(0,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2))...
-besselk(2,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/((2.*((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2))...
+exp(-lambda.*(-xs+x1)).*((lambda.*(-ys+y1).^2.*...
besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2).^(3./2)...
-(lambda.*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)...
-(lambda.*(-ys+y1).^2.*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/...
((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2).^(3./2)...
+(lambda.*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)...
-(lambda.*(-yp+y1).^2.*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/...
((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2).^(3./2)...
+(lambda.*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)...
+(lambda.*(-yp+y1).^2.*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/...
((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2).^(3./2)...
-(lambda.*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)...
-(lambda.^2.*(-ys+y1).^2.*(-besselk(0,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))...
-besselk(2,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/((2.*((-xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))...
+(lambda.^2.*(-ys+y1).^2.*(-besselk(0,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))...
-besselk(2,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2)))/((2.*((xs+x1).^2+(-ys+y1).^2))...
+(lambda.^2.*(-yp+y1).^2.*(-besselk(0,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2))...
-besselk(2,lambda.*sqrt((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/((2.*((-xs+x1).^2+(-yp+y1).^2))...
-(lambda.^2.*(-yp+y1).^2.*(-besselk(0,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2))...
-besselk(2,lambda.*sqrt((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2)))/((2.*((xs+x1).^2+(-yp+y1).^2))));

[x1,y1]=meshgrid(Y1,X1);
%laplacien de psik
laplace2=...%ici on utilise la meme formule que pour laplace1 mais avec une grille
%décalée de pas.

tot1=int*laplace1;
tot2=int*laplace2;

```

```

%calcul de la vitesse u pour la source et le puits
u1=-(exp(-lambda.*(-xs+x)).*((lambda.*(-ys+y).*...
besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x).^2+(-ys+y).^2))./sqrt((-xs+x).^2+(-ys+y).^2))...
+(lambda.*(-ys+y).*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x).^2+(-ys+y).^2))./sqrt((xs+x).^2+(-ys+y).^2))...
+(lambda.*(-yp+y).*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x).^2+(-yp+y).^2))./sqrt((-xs+x).^2+(-yp+y).^2))...
-(lambda.*(-yp+y).*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x).^2+(-yp+y).^2))./sqrt((xs+x).^2+(-yp+y).^2)));
%calcul de v source puit
v1=-exp(-lambda.*(-xs+x)).*lambda.*(besselk(0,lambda.*sqrt((-xs+x).^2+(-ys+y).^2))...
-besselk(0,lambda.*sqrt((xs+x).^2+(-ys+y).^2))-besselk(0,lambda.*sqrt((-xs+x).^2+(-yp+y).^2))+...
besselk(0,lambda.*sqrt((xs+x).^2+(-yp+y).^2)))+exp(-lambda.*(-xs+x)).*((lambda.*(-xs+x).*...
besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x).^2+(-ys+y).^2))./sqrt((-xs+x).^2+(-ys+y).^2))+...
(lambda.*(xs+x).*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x).^2+(-ys+y).^2))./sqrt((xs+x).^2+(-ys+y).^2))+...
(lambda.*(-xs+x).*besselk(1,lambda.*sqrt((-xs+x).^2+(-yp+y).^2))./sqrt((-xs+x).^2+(-yp+y).^2))-...
(lambda.*(xs+x).*besselk(1,lambda.*sqrt((xs+x).^2+(-yp+y).^2))./sqrt((xs+x).^2+(-yp+y).^2));

dtotdx(1:n+1,1:n+1)=(tot1(1:n+1,2:n+2)-tot1(1:n+1,1:n+1))./(pas);
dtotdy(1:n+1,1:n+1)=-((tot2(1:n+1,1:n+1)-tot2(2:n+2,1:n+1))./(pas));

total=dtotdy.*int.*v1+dtotdx.*int.*u1;

X=pas/2:pas:(1-pas/2);
Y=pas/2:pas:(1-pas/2);
[x,y]=meshgrid(X,Y);
somme=zeros(1/pas,1/pas,2);

for xxs=0:pas:1
    for yxs=0:pas:1

R1=(x-xxs).^2+(y-yxs).^2;
R2=(x+xxs).^2+(y-yxs).^2;

phi1=exp(lambda.*(xxs-x)).*(besselk(0,lambda.*R1.^(1/2))-besselk(0,lambda.*R2.^(1/2)));%source
somme(:,:,1)=somme(:,:,1)-(total(int32(yxs*(1/pas))+1,int32(xxs*(1/pas))+1)).*phi1;

    end
end

iter=2;

jac=jacob(somme(:,:,1));

for xxs=pas:pas:(1-pas)
    for yxs=pas:pas:(1-pas)

R1=(x-xxs).^2+(y-yxs).^2;

```

```
R2=(x+xxs).^2+(y-yxs).^2;
```

```
phi1=exp(lambda.*(xxs-x)).*(besselk(0,lambda.*R1.^(1/2))-besselk(0,lambda.*R2.^(1/2)));%source
```

```
somme(:, :, 2)=somme(:, :, 2)...
```

```
-(jac(int32(yxs*(1/pas))+1,int32(xxs*(1/pas))+1)+jac(int32(yxs*(1/pas)),int32(xxs*(1/pas))+1)...
```

```
+jac(int32(yxs*(1/pas)),int32(xxs*(1/pas)))+jac(int32(yxs*(1/pas))+1,int32(xxs*(1/pas)))).*phi1/4;
```

```
end
```

```
end
```

*Remarque* : Ces formules compliquées ont été vérifiées en faisant le calcul numériquement.

## Annexe E

# Programme pour tenter de calculer une solution à l'équation stationnaire et non linéaire

Nous avons tenté au cours de ce stage de trouver numériquement une solution au problème stationnaire avec les termes non linéaires. L'idée était d'adapter la méthode de Newton à l'équation stationnaire. La méthode ne convergeant pas, deux causes peuvent être invoquées :

- Un problème dans le programme.
- La méthode n'est pas adaptée pour trouver une solution à ce problème.

Voici le programme : On reprend le même principe que pour la fonction calculant la solution à l'équation non linéaire dans la couche de Stommel. Pour la solution initiale, on choisit la solution à l'équation linéaire trouvée avec le programme en annexe. A chaque itération, le remplissage d'une matrice F se fait à partir de l'équation linéaire discrétisée et du  $\psi$  de l'itération précédente. Puis on calcule le jacobien de F se qui permet de déduire, après la résolution d'un système linéaire, le  $\psi$  suivant.

```
program caleqnonlin
implicit none
  real :: r,xs,ys,yp,pas,aa,Nbis,tot,eps,intq
  integer, parameter :: N=110
  integer :: is,ip,js,nv,contx,conty,kl,ku,i,j,i1,j1,iter,irsis
  real, dimension(N*N,N*N) :: A,JA
  real, dimension(N*N) :: D,F
  real :: b,c1,c2,c3,c4,c5
  integer :: ii,jj,nc,m,n1i,n2i,n3i,n4i,n5i,INFO,ni,INFO1
  real :: n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9
  real :: n10,n11,n12,n13
  integer :: nouvdim,nouvdim2,nbiter,comp
  real, dimension((N-2)**2,(N-2)**2) :: Anew
  real, dimension((N-2)**2) :: Dnew
  integer, dimension((N-2)**2) :: IPIV
  integer, dimension((N-4)**2) :: IPIV2
  real,dimension((N-4)**2,(N-4)**2) :: Jnew
  real,dimension((N-4)**2) :: Fnew,F2
  real,dimension(N,N) :: psi,psi2
! IPIV tableau d'entier pour résoudre le sys lineaire
  tot=1
  psi2=0
  nouvdim=N-2
  nouvdim2=N-4
  Nbis=N !nombre de points
  pas=1/Nbis
```

```

D=0.
eps=0.01!coefficient adimensionnel des termes non linéaires
A=0.
xs=0.6!position de la source
ys=0.4
r=0.1!coefficient adimensionnel de friction
yp=1.-ys
is=N*ys
ip=N*yp
js=N*xs
!Constantes qui permettent de calculer la solution initiale
aa=r/(pas**2)
b=1/(2*pas)!Beta=1
c1=b+aa
c2=-b+aa
c3=-4*aa
c4=aa
c5=aa
nbiter=5!nb d'itération de la méthode de Newton
F=0
comp=0!compteur
intq=1!intensité de la source et du puits
print*, 'nombre d iterations de la methode de newton:', nbiter
! calcul de la solution sans les termes non lineaires
do ii=2, (N-1)
  do jj=2, (N-1)
    nc=(ii-1)*N
    m=(ii-1)*N+jj
    n1i=nc+jj+1
    n2i=nc+jj-1
    n3i=nc+jj
    n4i=(ii-2)*N+jj
    n5i=ii*N+jj
    A(m, n1i)=c1
    A(m, n2i)=c2
    A(m, n3i)=c3
    A(m, n4i)=c4
    A(m, n5i)=c5
  end do
end do
! source en is, js puit en ip, js

D((is-1)*N+js)=1*intq
D((ip-1)*N+js)=-1*intq

! on enlève les zéros de A et D pour résoudre le système linéaire

do i1=1, N-2

  do j1=1, N-2

    Anew((N-2)*(i1-1)+1: (N-2)*i1, (N-2)*(j1-1)+1: (N-2)*j1)=&
&A(N*i1+2: N*(i1+1)-1, N*j1+2: N*(j1+1)-1)

  end do
end do

```

```

Dnew((N-2)*(i1-1)+1:(N-2)*i1)=D(N*i1+2:N*(i1+1)-1)

end do

! resolution du systeme lineaire Anew*X=Dnew

call SGESV(nouvdim**2,1,Anew,nouvdim**2,IPIV,Dnew,nouvdim**2,INFO)

do m=2,N-1
    psi(m,2:N-1)=Dnew(((N-2)*(m-2)+1):((N-2)*(m-1)))
end do

!Résolution avec les termes non lineaires en utilisant la methode de newton
do iter=1,nbiter
comp=comp+1
print*,comp

do i=3,N-2
do j=3,N-2

ni=N*(i-1)+j
n1=psi(i,j)
n2=psi(i,j+1)
n3=psi(i,j+2)
n4=psi(i,j-1)
n5=psi(i,j-2)
n6=psi(i+1,j)
n7=psi(i+2,j)
n8=psi(i-1,j)
n9=psi(i-2,j)
n10=psi(i+1,j-1)
n11=psi(i+1,j+1)
n12=psi(i-1,j-1)
n13=psi(i-1,j+1)

JA(ni,ni)=-4*r/(pas**2);
JA(ni,N*i+j)=1/(4*pas**4)*eps*(n10-4*n6+n11+n7-n12+4*n8-n13-n9)&
&+eps*(n6-n8)/(pas**4)+1/(2*pas)+r/(pas**2)
JA(ni,N*(i+1)+j)=-eps*(n6-n8)/(4*pas**4)
JA(ni,N*(i-2)+j)=-1/(4*pas**4)*eps*(n10-4*n6+n11+n7-n12+4*n8-n13-n9)&
&-eps*(n6-n8)/(pas**4)-1/(2*pas)+r/(pas**2)
JA(ni,N*(i-3)+j)=eps*(n6-n8)/(4*pas**4)
JA(ni,N*(i-1)+j+1)=-eps*(n2-n4)/(pas**4)-eps/(4*pas**4)*&
&(-4*n2+n3+n13+n11-n5+4*n4-n12-n10)+r/(pas**2)
JA(ni,N*(i-1)+j+2)=eps*(n2-n4)/(4*pas**4)
JA(ni,N*(i-1)+j-1)=eps*(n2-n4)/(pas**4)+eps/(4*pas**4)*&
&(-4*n2+n3+n13+n11-n5+4*n4-n12-n10)+r/(pas**2)

```

```

JA(ni,N*(i-1)+j-2) =-eps*(n2-n4)/(4*pas**4)
JA(ni,N*(i-2)+j+1) =eps/(4*pas**4)*(n2-n4+n6-n8)
JA(ni,N*(i)+j+1) =eps/(4*pas**4)*(n2-n4-n6+n8)
JA(ni,N*(i-2)+j-1)=eps/(4*pas**4)*(-n2+n4+n6-n8)
JA(ni,N*(i)+j-1)=eps/(4*pas**4)*(-n2+n4-n6+n8)
F(ni)=eps*((n2-n4)/(4*pas**4)*(n10-4*n6+n11+n7-n12+4*n8-n13-n9) &
-(n6-n8)/(4*pas**4)*(-4*n2+n3+n13+n11-n5+4*n4-n12-n10))&
+(n2-n4)/(2*pas)+r/(pas**2)*(n8-4*n1+n6+n4+n2)

end do
end do

i=is
  j=js
    ni=N*(i-1)+j
    n1=psi(i,j)
    n2=psi(i,j+1)
    n3=psi(i,j+2)
    n4=psi(i,j-1)
    n5=psi(i,j-2)
    n6=psi(i+1,j)
    n7=psi(i+2,j)
    n8=psi(i-1,j)
    n9=psi(i-2,j)
    n10=psi(i+1,j-1)
    n11=psi(i+1,j+1)
    n12=psi(i-1,j-1)
    n13=psi(i-1,j+1)
    F(ni)=eps*((n2-n4)/(4*pas**4)*&
&(n10-4*n6+n11+n7-n12+4*n8-n13-n9)-&
&(n6-n8)/(4*pas**4)*(-4*n2+n3+n13+n11-n5+4*n4-n12-n10))&
&+(n2-n4)/(2*pas)+r/(pas**2)*(n8-4*n1+n6+n4+n2)-1*intq

    i=ip
      j=js
        ni=N*(i-1)+j
        n1=psi(i,j)
        n2=psi(i,j+1)
        n3=psi(i,j+2)
        n4=psi(i,j-1)
        n5=psi(i,j-2)
        n6=psi(i+1,j)
        n7=psi(i+2,j)
        n8=psi(i-1,j)
        n9=psi(i-2,j)
        n10=psi(i+1,j-1)
        n11=psi(i+1,j+1)
        n12=psi(i-1,j-1)
        n13=psi(i-1,j+1)
        F(ni)=eps*((n2-n4)/(4*pas**4)*(n10-4*n6+n11+n7-n12+4*n8-n13-n9)-&
&(n6-n8)/(4*pas**4)*(-4*n2+n3+n13+n11-n5+4*n4-n12-n10))&
&+(n2-n4)/(2*pas)+r/(pas**2)*(n8-4*n1+n6+n4+n2)+1*intq

do i1=1,N-4

do j1=1,N-4

```

```

        Jnew((N-4)*(i1-1)+1:(N-4)*i1,(N-4)*(j1-1)+1:(N-4)*j1)=&
&JA(N*(i1+1)+3:N*(i1+2)-2,N*(j1+1)+3:N*(j1+2)-2)

        end do

        Fnew((N-4)*(i1-1)+1:(N-4)*i1)=F(N*(i1+1)+3:N*(i1+2)-2)

        end do

        F2=-Fnew

!e le systeme lineaire J*(psin-psi(n-1))=-F B=psin-psi(n-1)

call SGESV(nouvdim2**2,1,Jnew,nouvdim2**2,IPIV2,F2,nouvdim2**2,INF01)

        do i=3,N-2
            psi2(i,3:N-2)=F2((i-3)*(N-5)+1:(i-2)*(N-5)+1);
        end do
            psi=psi+psi2

        end do

OPEN ( UNIT =1,           &
      FILE ="psi", &
      FORM ="formatted", &
      ACCESS ="sequential", &
      STATUS ="replace", &
      ACTION ="write", &
      POSITION ="rewind", &
      IOSTAT =irsis )

WRITE(1,*) psi
close( unit=1)

end

```