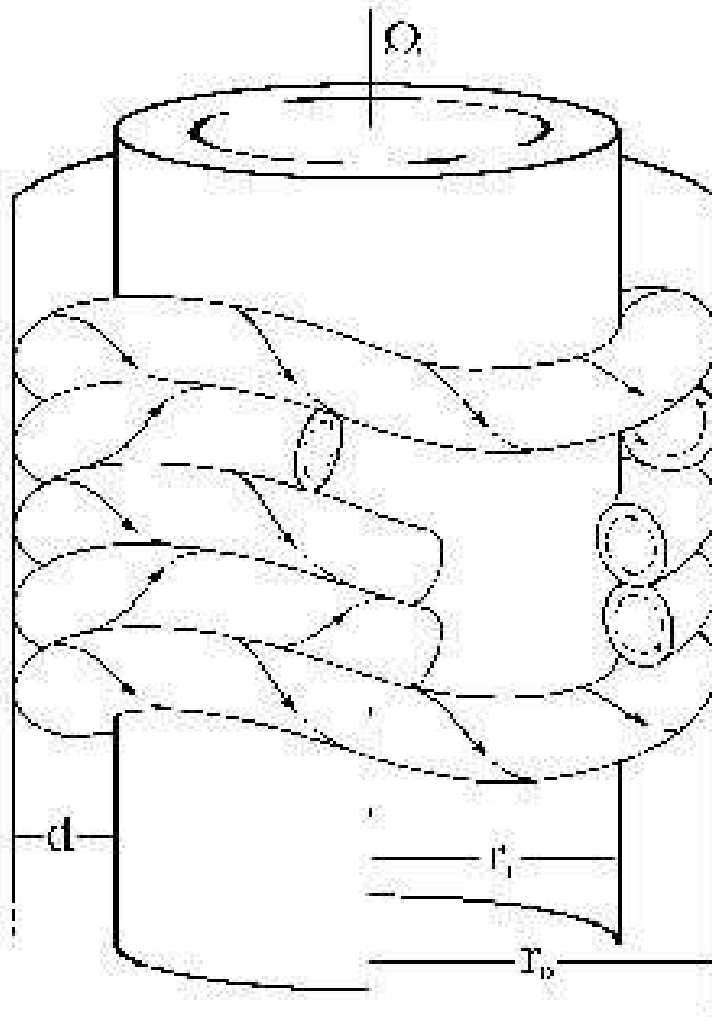


Effets de la stratification océanique sur les instabilités rotatives et convectives



Rapport de Stage de DEA
Raphaël Dussin
Encadrant : Hervé Mangel

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier le Directeur de l'IUT de Brest, Monsieur Joel LE GUEN, pour m'avoir autorisé à intégrer l'IUT et à effectuer mon stage de recherche au sein du Laboratoire Universitaire des Systèmes Industriels et Géophysiques (LUSIG). Tout au long de mon séjour au LUSIG, il m'a prodigué conseils et encouragements.

Je remercie Monsieur Blaise NSOM, Directeur du LUSIG, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et confié un sujet de recherche riche, dans lequel je me suis épanoui. Il a veillé durant mon séjour, au bon déroulement de mon stage et s'est régulièrement assuré de la qualité de mes conditions de travail et de mes résultats.

Je remercie Monsieur Hervé MANGEL pour avoir dirigé mes travaux de recherche ainsi que pour sa grande disponibilité et son implication dans ce stage. Je remercie aussi les thésards du laboratoire pour leur aide et leur sympathie ainsi que l'ensemble des membres du LUSIG pour tout l'environnement scientifique qu'ils m'ont apporté.

Notations

a : longueur d'onde adimensionnelle

d : taille de l'entrefer

g : accélération de la gravité

k : vecteur d'onde

p : pression

u_r, u_θ, u_z : vitesses radiale, orthoradiale et verticale

D : opérateur de la dérivation

G : nombre de Grasshoff

N : fréquence de Brunt-Vaïssala

Pr : nombre de Prantl

R : nombre de Rayleigh

S : salinité

Sc : nombre de Schmidt

T : nombre de Taylor (Taylor-Couette), température (Rayleigh-Bénard)

α : coefficient de compressibilité thermique

β : coefficient de compressibilité halin

κ : diffusivité

ν : viscosité cinématique

Ω_1, Ω_2 : vitesse angulaire du cylindre intérieur, extérieur

ρ : masse volumique

σ : pulsation adimensionnelle

ζ : rayon adimensionnel

Introduction

Les fluides géophysiques sont soumis à deux paramètres déterminants pour la résolution de leurs écoulements, à savoir la rotation de la terre (qui est négligée pour les expériences de laboratoire) ainsi que l'influence de la stratification. On a étudié l'effet de la salinité dans le cas d'instabilités rotatives et convectives car on trouve dans l'océan des conditions favorables à ce type d'écoulements. En effet, on ne trouve dans les configurations naturelles, aucun écoulement laminaire mais des flots soumis à des instabilités (barotrope et barocline notamment) et à la turbulence car les forces déstabilisantes (force centrifuge, flotabilité) sont très grandes par rapport aux forces stabilisantes.

Tout d'abord, on a utilisé la théorie développée par B.L. Hua, D.W. Moore et S. Le Gentil [2] ainsi que les travaux de F. Caton [3] pour l'écoulement de Taylor-Couette stratifié mais à l'échelle du globe. En effet, on a étudié la possibilité qu'il se produise une instabilité de Taylor-Couette dans le cas où les cylindres sont de révolution le long de l'axe de rotation terrestre. Ceci se justifie du fait que pour une faible extension latitudinale, on peut négliger la sphéricité de la terre (approximation du plan β) et que la dimension de la colonne d'eau (quelques km) est très petite devant le rayon terrestre (6400 km).

Par la suite, on s'est intéressé à l'influence de la stratification océanique sur les instabilités convectives de Rayleigh-Bénard. En effet, dans les mers polaires on a des masses d'eau sous de la glace qui vont donc être refroidies par le haut et qui peuvent être réchauffées par le dessous par des masses d'eau plus chaudes venant de latitudes plus faibles. La différence de masse volumique induite entraîne la formation de cellules convectives dues aux forces de flotabilité. L'influence de la salinité sur la densité de l'eau de mer s'avérant aussi essentielle que celle de la température, l'étude de cette configuration était indispensable pour la cohérence avec le système naturel. Elle constitue de plus une originalité de ce rapport, cette étude n'ayant pas été trouvée dans des travaux antérieurs.

Chapitre 1

Écoulement de Taylor-Couette en fluide homogène

1.1 Equations du problème

On appelle écoulement de Taylor-Couette le mouvement d'un fluide compris entre deux cylindres coaxiaux et verticaux en rotation, le cylindre intérieur ayant un rayon R_1 et une vitesse angulaire Ω_1 et le cylindre extérieur ayant un rayon R_2 et une vitesse angulaire Ω_2 . L'expérience a été réalisée pour la première fois par Couette dans le but de mesurer la viscosité d'un fluide. Or quand la rotation devient plus rapide, le régime laminaire initial laisse place à un régime turbulent. Taylor a ensuite étudié la stabilité linéaire du système et montré qu'il se produisait un régime transitoire, appelé vortex de Taylor, entre les régimes laminaire stable et turbulent. Les équations générales du mouvement du fluide sont les équations de Navier-Stokes $\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{g} - \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu(\nabla^2\vec{u})$ dont la projection (voir Annexe 1) sur les axes d'un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , où z est pris le long de l'axe des cylindres, donne :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_z = -g - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu(\nabla^2 u_z) \quad (1.3)$$

Alors que l'équation de continuité $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ s'écrit :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

En régime laminaire stable, l'écoulement est orthoradial et les lignes de courant sont des cercles concentriques. On a donc $u_r = 0$ et $u_z = 0$. Pour un écoulement permanent, on a aussi $\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = 0$. En négligeant les termes non linéaires, on peut montrer en dérivant l'équation (1.1) par rapport à θ que comme u_θ est indépendant de θ et ce par raison de symétrie alors p l'est aussi. Il reste donc seulement le terme de viscosité dans l'équation (1.2) qui devient :

$$\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) = 0 \quad (1.5)$$

Ainsi que l'équilibre dynamique axial issu de (1.1) :

$$\frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (1.6)$$

et l'équation de continuité est identiquement nulle.

L'équation (1.5) a pour solution $V = Ar + \frac{B}{r}$ où A et B satisfont aux conditions aux limites où la vitesse du fluide s'ajuste à celle des cylindres, on a donc :

$$A = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \text{ et } B = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Si on augmente progressivement la vitesse du cylindre intérieur, on observe à partir d'une certaine valeur critique Ω_c l'apparition de tourbillons axisymétriques, contrarotatifs, périodiques en z et ayant une forme toroïdale. Pour étudier le régime perturbé, on linéarise par rapport aux petites perturbations $u_r = u'_r$, $u_\theta = V + u'_\theta$, $u_z = u'_z$ et $p = P + p'$ et obtient ainsi :

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - 2 \frac{V u'_\theta}{r} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{\rho} \right) + \nu (\nabla^2 u'_r - \frac{u'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta}) \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u'_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p'}{\rho} \right) + \nu (\nabla^2 u'_\theta - \frac{u'_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta}) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial u'_z}{\partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho} \right) + \nu (\nabla^2 u'_z) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0 \quad (1.10)$$

Afin de déterminer les conditions hydrodynamiques d'apparition de ces tourbillons, on représente cette instabilité par la superposition à l'état principal ci-dessus, d'une petite perturbation ayant la forme suivante :

$$u'_r = e^{pt}u(r)\cos(kz), u'_\theta = e^{pt}v(r)\cos(kz), u'_z = e^{pt}w(r)\sin(kz) \text{ et} \\ \frac{p'}{\rho} = e^{pt}h(r)\cos(kz)$$

Posons $D = \frac{d}{dr}$ et $D_* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$. On peut montrer que pour un petit entrefer ($r_1 \simeq r_2$), $D_* \simeq D$. On obtient donc le système d'équations ci-dessous :

$$\nu(D^2 - k^2 - \frac{p}{\nu})u + 2\frac{V}{r}v = \frac{dh}{dr} \quad (1.11)$$

$$\nu(D^2 - k^2 - \frac{p}{\nu})v - (DV)u = 0 \quad (1.12)$$

$$\nu(D^2 - k^2 - \frac{p}{\nu})w = -kh \quad (1.13)$$

$$Du = -kw \quad (1.14)$$

Faisons les changements de variables suivants afin d'introduire des grandeurs et nombres adimensionnels dans les équations. On pose $d = r_2 - r_1$, $\zeta = \frac{(r-r_1)}{d}$, $\sigma = \frac{pd^2}{\nu}$, $\alpha = -(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1})$, $a = kd$ et $T = -\frac{4A\Omega_1}{\nu^2}d^4$ le nombre de Taylor. En combinant les équations ci-dessus, on obtient :

$$(D^2 - a^2 - \sigma)(D^2 - a^2)u = \frac{2\Omega_1 d^2}{\nu}a^2(1 + \alpha\zeta)v \quad (1.15)$$

$$(D^2 - a^2 - \sigma)v = \frac{2Ad^2}{\nu}u \quad (1.16)$$

Enfin en procédant aux adimensionnalisations $D \rightarrow \frac{D}{d}$, $u \rightarrow \frac{2\Omega_1 d^2 a^2}{\nu}u$, on obtient :

$$(D^2 - a^2 - \sigma)(D^2 - a^2)u = (1 + \alpha\zeta)v \quad (1.17)$$

$$(D^2 - a^2 - \sigma)v = -Ta^2u \quad (1.18)$$

Les équations (1.17) et (1.18) peuvent être regroupées en une équation unique en multipliant (1.17) par $-Ta^2$, on obtient :

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)^2v = -Ta^2(1 + \alpha\zeta)v$$

A cette équation, il faut ajouter les conditions d'adhérence du fluide aux parois des cylindres, qui s'expriment par :

$$u = 0, v = 0 \text{ et } Du = 0 \text{ en } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = 1$$

Ce paragraphe a repris seulement les idées essentielles du raisonnement, pour plus de détails notamment au niveau des calculs on peut se reporter à Chandrasekhar [1].

1.2 Résultats obtenus

Pour obtenir la courbe de stabilité marginale ($\sigma = 0$), il faut trouver dans l'équation unique ci-dessus pour chaque a donné la valeur du nombre de Taylor T associée. Pour ce faire, on utilise une méthode de type transformée de Laplace. On trouve ainsi des solutions dans l'espace associé puis on revient dans l'espace réel par la transformée inverse.

La résolution donne six solutions linéairement indépendantes puis on applique les six conditions aux limites sur ces six solutions ce qui nous donne une matrice $(6, 6)$ dont le déterminant s'annule pour la valeur correcte de T . Cette partie est faite numériquement. Le calcul détaillé se trouve en Annexe 2 section 1.

Un exemple de courbe de stabilité marginale obtenue numériquement avec $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ est présenté ci-dessous. Le nombre de Taylor critique est le minimum de la courbe $T = f(a)$. On obtient comme point critique $(3.125, 3390)$, ce qui est cohérent avec les résultats expérimentaux. D'autres courbes de stabilité sont disponibles dans l'Annexe 2 section 1. On remarque que plus on augmente le ratio $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$, plus le nombre de Taylor et la longueur d'onde associée augmentent car Ω_1 doit augmenter pour compenser l'affaiblissement de A .

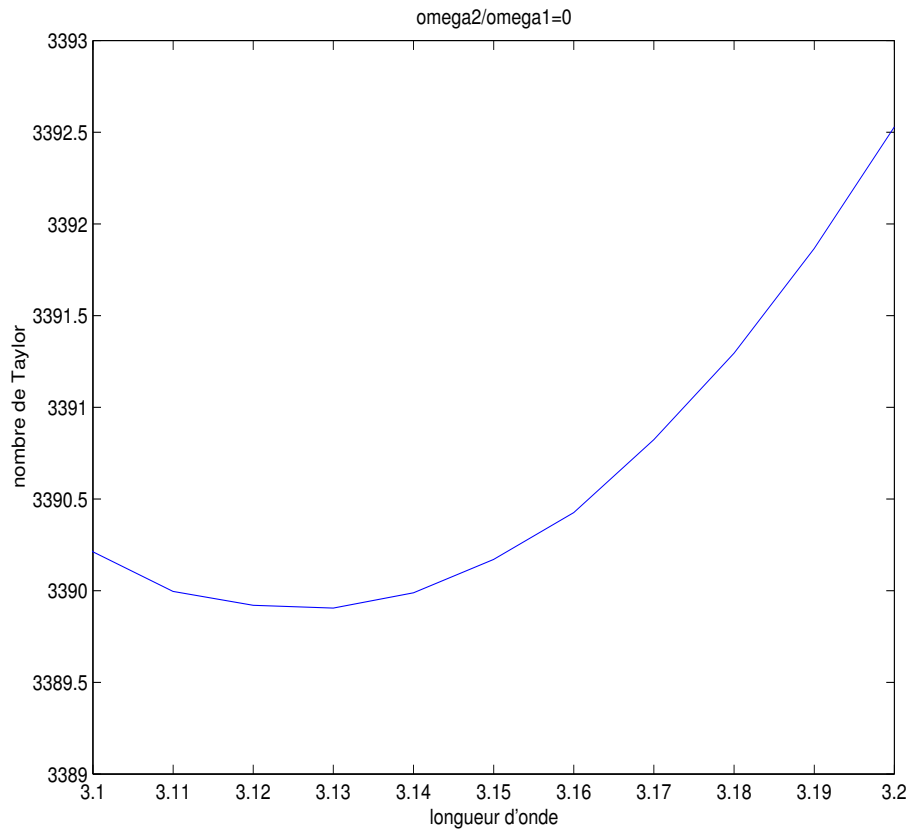


FIG. 1.1 – *Courbe de stabilité marginale d'un écoulement de Taylor-Couette homogène.*

Chapitre 2

Écoulement de Taylor-Couette en fluide stratifié

2.1 Equations du problème

On va maintenant s'intéresser au cas d'un fluide stratifié. La rotation de la terre peut être vue comme un système de Taylor-Couette pour peu que l'on ne s'écarte pas trop de l'équateur. En effet, à l'échelle de quelques kilomètres, on peut négliger la sphéricité de la terre. On identifie alors la bande équatoriale à un cylindre. Comme précédemment, on part des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques pour lesquelles on fait l'approximation de Boussinesq. On a aussi l'équation de continuité ainsi que dorénavant l'équation de conservation de la masse volumique ρ :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \nu(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \nu(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_z = -g \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \nu(\nabla^2 u_z) \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho = \kappa \Delta \rho \quad (2.5)$$

On linéarise de la même manière, avec en plus $\rho = \rho_0(z) + \rho'$ et on obtient alors :

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - 2 \frac{V u'_\theta}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p'}{\rho} \right) + \nu \left(\nabla^2 u'_r - \frac{u'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u'_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p'}{\rho} \right) + \nu \left(\nabla^2 u'_\theta - \frac{u'_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho} \right) - g \frac{\rho'}{\rho_0} + \nu \left(\nabla^2 u'_z \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} + u'_z \frac{d\rho_0}{dz} = \kappa \Delta \rho' \quad (2.10)$$

Pour l'analyse de stabilité linéaire, on étudie des perturbations de la forme $f(r)e^{i(pt+kz)}$. De ce fait, toutes les dérivées par rapport à θ sont nulles et en posant $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - k^2$ et $D^2 = \Delta - \frac{1}{r^2}$, on obtient le système d'équations suivant :

$$ipu - 2\left(A + \frac{B}{r^2}\right)v = -\frac{\partial h}{\partial r} + \nu D^2 u \quad (2.11)$$

$$ipv + 2Au = \nu D^2 v \quad (2.12)$$

$$ipw = -ikh - g \frac{\rho'}{\rho_0} + \nu \Delta w \quad (2.13)$$

$$w = \frac{i}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \quad (2.14)$$

$$ip\rho + w \frac{d\rho_0}{dz} = \kappa \Delta \rho \quad (2.15)$$

On introduit la fréquence de Brunt-Vaïssala $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}$, l'équation (3.34) devient donc :

$$(\kappa \Delta - ip)\rho = -\frac{\rho_0 N^2}{g} w \quad (2.16)$$

D'autre part, on peut montrer que $\frac{\partial}{\partial r} \Delta = D^2 \frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right) = (D^2 + k^2)$. On dérive par rapport à r l'équation (2.13) et on remplace $\frac{\partial h}{\partial r}$ par sa valeur dans (2.11). Puis on multiplie (2.13) par $(\kappa D^2 - ip)$ pour éliminer ρ en utilisant (2.16). Enfin, on élimine w en utilisant (2.14) et on multiplie par k . Il reste donc les deux équations suivantes :

$$(\nu D^2 - ip)v = 2Au \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
& [(\kappa D^2 - ip)(\nu D^2 - ip)D^2 + N^2(D^2 + k^2)]u \\
& = 2k^2(\kappa D^2 - ip)\left(A + \frac{B}{r^2}\right)v
\end{aligned} \tag{2.18}$$

De plus, dans le cadre de l'approximation du petit entrefer, on montre que :

$$A + \frac{B}{r^2} \simeq \Omega_1(1 + \alpha\zeta)$$

On va ensuite adimensionnaliser les équations avec les mêmes changements de variables que dans le cas homogène et avec des nombres adimensionnels en plus : $Sc = \frac{\nu}{\kappa}$ est le nombre de Schmidt et $G = \frac{N^2 d^4}{\nu^2}$ est le nombre de Grasshoff

$$(D^2 - a^2 - i\sigma)v = -Ta^2u \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
& [(D^2 - a^2 - iSc\sigma)(D^2 - a^2 - i\sigma)(D^2 - a^2) + ScGD^2]u \\
& = (D^2 - a^2 - iSc\sigma)(1 + \alpha\zeta)v
\end{aligned} \tag{2.20}$$

auxquelles il convient de rajouter les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}
& v = 0 \text{ en } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = 1 \\
& u = 0 \Rightarrow (D^2 - a^2 - i\sigma)v = 0 \text{ en } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = 1 \\
& Du = 0 \Rightarrow D(D^2 - a^2 - i\sigma)v = 0 \text{ en } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = 1
\end{aligned}$$

En multipliant (2.20) par $-Ta^2$, on obtient une équation unique pour le problème :

$$\begin{aligned}
& [(D^2 - a^2 - iSc\sigma)(D^2 - a^2 - i\sigma)(D^2 - a^2) + ScGD](D^2 - a^2 - i\sigma)v \\
& = -Ta^2(D^2 - a^2 - iSc\sigma)(1 + \alpha\zeta)v
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Compte-tenu des ordres de grandeur de ν et κ , on fait l'approximation que le nombre de Schmidt peut être pris comme tendant vers l'infini [3]. De plus pour être en adéquation avec le cas planétaire, le cylindre extérieur sera pris comme immobile, on aura donc $\alpha = -1$. De plus, les conditions aux limites sont du type rigide sur les deux cylindres ce qui revient à faire l'hypothèse du toit rigide pour la surface de l'océan. Le système à résoudre sera donc le suivant :

$$((D^2 - a^2 - i\sigma)(D^2 - a^2) + i\frac{G}{\sigma}D^2)u = (1 - \zeta)v \tag{2.22}$$

$$(D^2 - a^2 - i\sigma)v = -Ta^2u \tag{2.23}$$

Avec les conditions aux limites $u = v = \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \rho = 0$ en $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$.

2.2 Résultats et analyse

Pour la résolution détaillée du système, se reporter à l'Annexe 2 section 2. Comme la méthode de la transformée de Laplace mène à des intégrales qui divergent dans l'espace associé, on va donc utiliser les séries de Fourier. La solution donnée par cette méthode possède le défaut de ne pas être utilisable pour $\sigma = 0$, on ne peut donc pas tracer la courbe de stabilité marginale mais seulement des courbes de stabilité pour des instabilités périodiques dans le temps.

Dans un premier temps, on se place dans le cas d'une expérience de laboratoire avec une taille d'entrefer petite $d = 5cm$ où l'on a fait ressembler artificiellement le fluide à l'océan en lui attribuant des valeurs comparables de fréquence de Brunt-Vaïssala $N = 10^{-3}s^{-1}$, de viscosité $\nu = 10^{-4}m.s^{-2}$ et de diffusivité $\kappa = 10^{-4}m.s^{-2}$ pour simuler la stratification et la turbulence océanique. On choisit arbitrairement une pulsation des perturbations de $\sigma = 0.05rad.s^{-1}$ et on obtient la première courbe de stabilité ci-dessous. La fréquence angulaire de rotation du cylindre intérieur trouvée dans ce cas est $\Omega = 0.71rad.s^{-1}$ ce qui correspond à une vitesse linéaire de $v = 0.32m.s^{-1}$.

On peut noter aussi l'influence des nombres de Grasshoff G et de σ : lorsque l'on augmente G , le point critique évolue vers un nombre de Taylor plus faible et une plus grande longueur d'onde et lorsque l'on augmente σ , il évolue vers un nombre de Taylor plus grand et une longueur d'onde plus faible. On constate donc que les effets de G et de σ sont opposés comme pouvait le laisser supposer le terme $i\frac{G}{\sigma}D^2$ de l'équation (2.22). L'influence de σ sur le nombre de Taylor se rationalise facilement car le fluide évolue d'un régime laminaire à un régime turbulent en passant successivement par une phase d'instabilités stationnaires puis oscillatoires. Les instabilités ayant une fréquence plus élevée nécessitent de ce fait un nombre de Taylor plus élevé. L'influence de G quant à lui est aussi cohérente car si on prend un fluide plus visqueux alors G diminue et T augmente. Les effets les plus surprenants sont que la stratification et la taille de l'entrefer sont des moteurs de l'instabilité. En effet, en augmentant G , ils réduisent T c'est-à-dire le couple à exercer.

Dans un deuxième temps, on va utiliser ce modèle dans le cas grandeur nature de la planète. Contrairement à l'article [2], on a étudié la rotation terrestre selon la composante diurne du fait des hypothèses concédées. En effet, on a supposé que la dimension de l'entrefer est beaucoup plus petite que la hauteur des cylindres. Dans le cas terrestre, cela revient à prendre comme

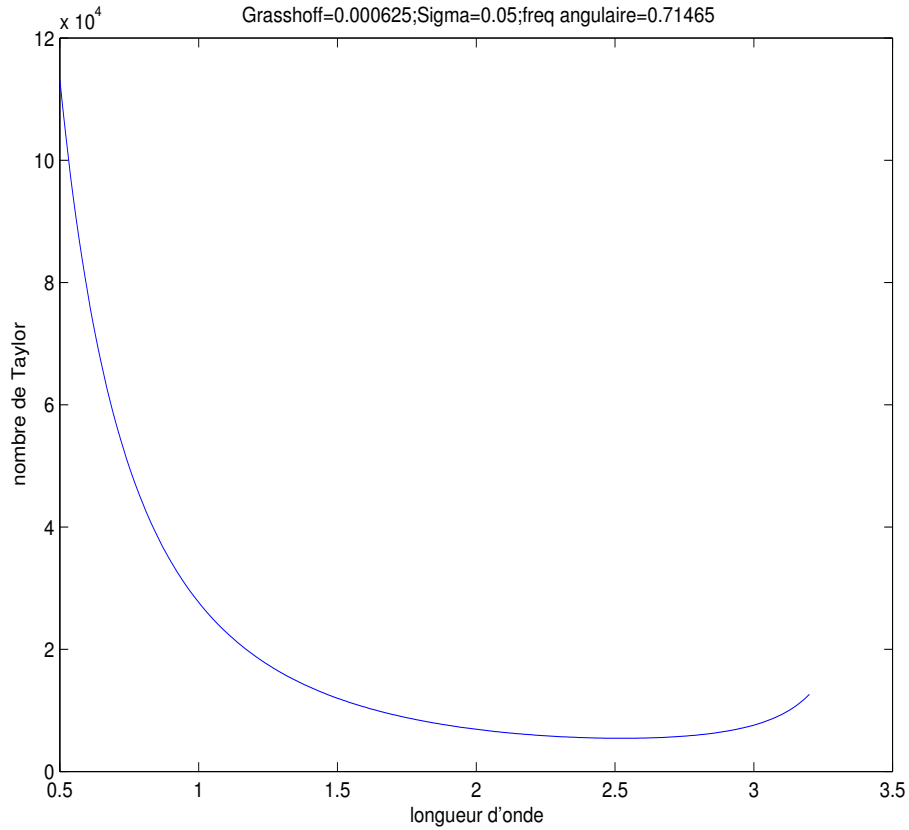


FIG. 2.1 – *Courbe de stabilité d'un écoulement de Taylor-Couette stratifié en laboratoire.*

entrefer la profondeur de l'océan et comme hauteur de cylindre la coordonnée latitudinale. Le temps caractéristique choisi pour la périodicité de l'instabilité est celui de la rotation diurne. La courbe de stabilité correspondante se trouve ci-dessous. On voit que pour des stratifications faibles ($N = 10^{-16} s^{-1}$), on obtient une fréquence angulaire critique de l'ordre de 10^{-10} c'est-à-dire très inférieure à celle de la rotation diurne. On peut donc en conclure que dans ce cas l'instabilité de Taylor-Couette est possible dans l'océan.

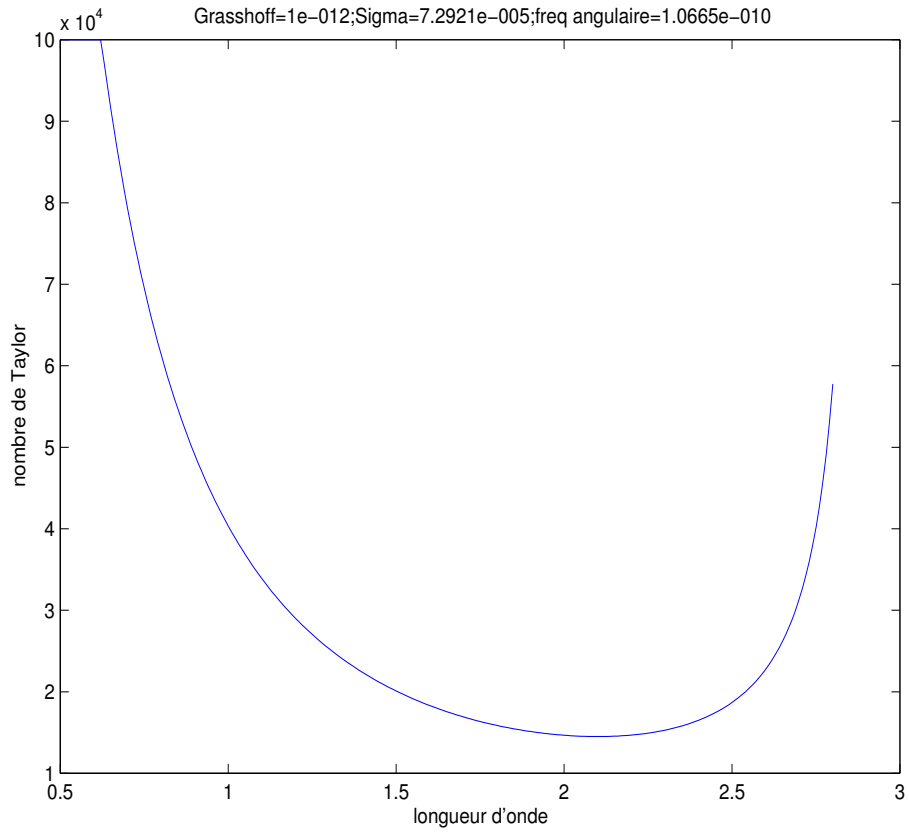


FIG. 2.2 – Courbe de stabilité d'un écoulement de Taylor-Couette stratifié dans le cas terrestre.

Chapitre 3

Instabilité de Rayleigh-Bénard en fluide homogène

3.1 Equations du problème

Le transfert thermique par convection est le mode de transmission de la chaleur entre un fluide en mouvement et un solide. La convection est dite libre lorsque le mouvement du fluide n'est imposé par aucune contrainte mécanique autre que la pesanteur. Les expériences de Bénard apportent une excellente compréhension de la convection libre. Considérons une nappe liquide horizontale située entre deux parois régularisées thermiquement, la paroi inférieure étant plus chaude de ΔT que la paroi supérieure.

Tant que ΔT , n'est pas trop grand, les couches inférieures, plus chaudes donc moins denses, supportent de stagner sous les couches supérieures froides. Mais à partir d'un écart ΔT_c critique, les couches chaudes se soulèvent ; il se crée des cheminées ascendantes de liquide chaud, qui se refroidit en haut et alimente alors les cheminées descendantes froides. Ces courants de convection forment alors dans l'espace des cellules elles-mêmes stables, périodiquement réparties dans l'espace. Cette convection est dite laminaire. Si ΔT est encore augmenté, on atteint des valeurs pour lesquelles la convection devient turbulente, l'arrangement des cellules étant irrégulier et instable. Les équations à utiliser dans ce cas sont celles de la conservation de la quantité de mouvement, de la masse et de la chaleur ainsi que l'équation d'état :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\rho}{\rho_0}\vec{g} - \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2u \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T \quad (3.3)$$

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (3.4)$$

On linéarise ce système par rapport à des petites perturbations $T = T_0 - |\frac{dT}{dz}| + \theta$ et il se réduit au système suivant (voir Chandrasekhar [1] p 16 à 21) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = g\alpha \nabla_H^2 \theta + \nu \nabla^4 w \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left| \frac{dT}{dz} \right| w + \kappa \nabla^2 \theta \quad (3.7)$$

où ζ est la vorticité et $|\frac{dT}{dz}|$ la valeur absolue du gradient de température appliqué. Pour l'analyse de stabilité linéaire, on prend des perturbations du type $e^{[i(k_x x + k_y y) + pt]}$ et on obtient les équations adimensionnées :

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)W = \left(\frac{g\alpha}{\nu} d^2\right) a^2 \Theta \quad (3.8)$$

$$(D^2 - a^2 - Pr\sigma)\Theta = -\left(\frac{dT}{dz} \frac{d^2}{\kappa}\right)W \quad (3.9)$$

où $D = \frac{d}{dz}$, $a = kd$, $\sigma = \frac{pd^2}{\nu}$ et $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ le nombre de Prantl. En éliminant Θ dans les deux équations précédentes et en posant $R = \frac{g\alpha}{\kappa\nu} \left| \frac{dT}{dz} \right| d^4$, on obtient une équation unique :

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)(D^2 - a^2 - Pr\sigma)W = -Ra^2W \quad (3.10)$$

Les conditions aux limites satisfaites par le problème sont $W = 0$, $\frac{dW}{dz} = 0$ et $\Theta = 0$ en $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$, cette dernière condition se traduit par $(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)W = 0$.

3.2 Résultats et analyse

On a donc une équation différentielle du sixième ordre que l'on a résolue conjointement avec Mathematica et Matlab. Cette résolution est disponible en Annexe 3. On trouve alors la courbe de stabilité marginale en page suivante, elle est en parfaite adéquation avec celle obtenue analytiquement par Chandrasekhar [1] pour le mode pair. Le mode impair n'est pas résolu par la méthode car, de par sa conception, elle renvoie une solution unique. En effet, la méthode étant du type bisection, elle s'arrête dès qu'elle a trouvé le premier zéro.

Dans cette instabilité, on peut remarquer que les actions de σ et Pr sont similaires et que leur augmentation fait évoluer le système vers un nombre de Rayleigh et une longueur d'onde plus élevés. En effet, une instabilité oscillatoire va se développer après la phase d'instabilité stationnaire et elle nécessite donc un nombre de Rayleigh plus élevé. De même plus le fluide est visqueux et/ou sa diffusivité est faible, plus le gradient de température appliqué devra être grand.

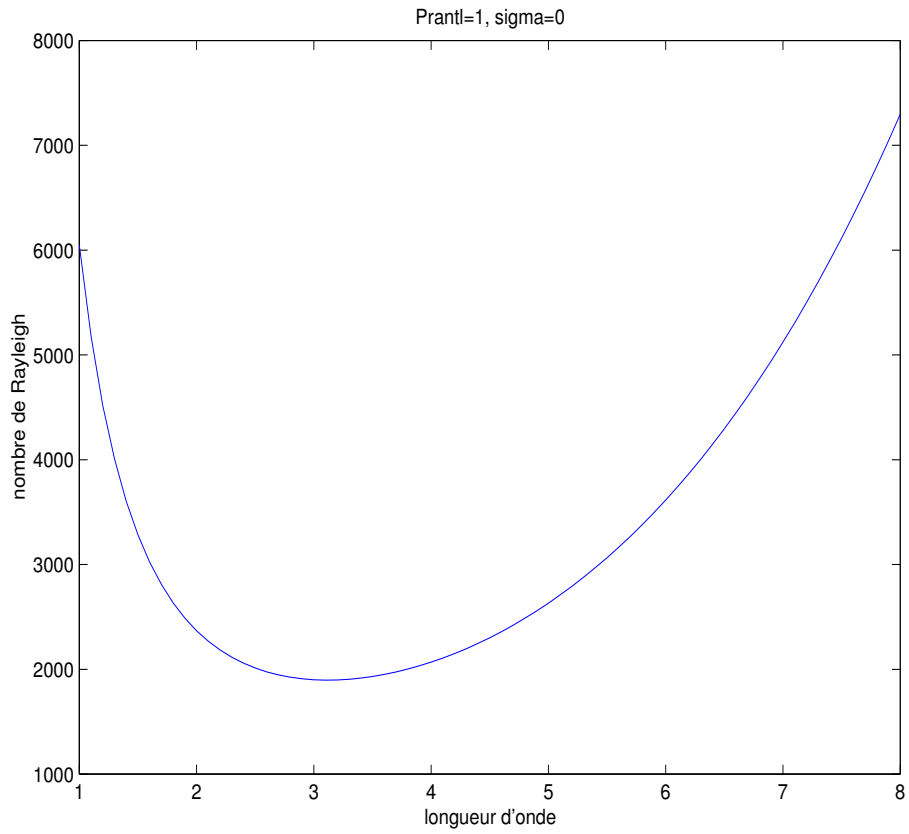


FIG. 3.1 – Courbe de stabilité marginale de l'instabilité de Rayleigh-Bénard en fluide homogène.

Chapitre 4

Le problème de Rayleigh-Bénard en fluide stratifié

4.1 Equations du problème

A présent, afin de se rapprocher d'une situation réelle en milieu océanique, nous allons considérer le problème en ajoutant un gradient de salinité stratifiant stablement ou instablement le système. Cette étude n'a, à notre connaissance, jamais été effectuée. Les calculs seront alors plus détaillés. Aux équations du chapitre précédent, il convient de rajouter une équation de conservation de la salinité :

$$\frac{DS}{Dt} = \kappa_s \nabla^2 S \quad (4.1)$$

Il faut aussi modifier l'équation d'état pour y faire apparaître la salinité telle que :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)) \quad (4.2)$$

Comme dans le cas non salé, les équations linéarisées deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = g\alpha \nabla_H^2 \theta - g\beta \nabla_H^2 S + \nu \nabla^4 w \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left| \frac{dT}{dz} \right| w + \kappa \nabla^2 \theta \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left| \frac{dS}{dz} \right| w + \kappa_s \nabla^2 S \quad (4.5)$$

L'analyse en modes normaux (perturbations en $e^{i(k_x x + k_y y) + pt}$) et l'adimensionnalisation donnent les équations suivantes :

$$(D^2 - a^2 - \sigma)(D^2 - a^2)W = \frac{g\alpha d^2 a^2}{\nu}\Theta - \frac{g\beta d^2 a^2}{\nu}S \quad (4.6)$$

$$(D^2 - a^2 - Pr\sigma)\Theta = \left| \frac{dT}{dz} \right| \frac{d^2}{\kappa} W \quad (4.7)$$

$$(D^2 - a^2 - Pr\sigma)S = \left| \frac{dS}{dz} \right| \frac{d^2}{\kappa_s} W \quad (4.8)$$

On élimine similairement Θ et S dans (4.6) à l'aide de (4.7) et (4.8) et on obtient l'équation du problème suivante :

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)(D^2 - a^2 - Pr\sigma)W = -Ra^2W + R_s a^2W \quad (4.9)$$

où $R_s = \frac{g\beta}{\kappa_s \nu} \left| \frac{dS}{dz} \right| d^4$ serait un nombre de Rayleigh de sel fixé par le gradient de salinité. On remarquera que si le gradient de sel est nul, on retrouve bien la même équation que pour le cas homogène.

4.2 Résultats et analyse

Dans le cas stablement stratifié par le sel, c'est-à-dire où le gradient de salinité est dirigé vers le bas et de valeur $10^{-3} psu.m^{-1}$, il faut alors appliquer une différence de température de $1120^\circ C$ aux extrémités d'une couche de 10 m. Ce résultat paraît cohérent avec les expériences de Bénard qui obtenait des instabilités avec une différence d'environ $1^\circ C$ entre deux plaques séparées d'1 cm. On peut alors conclure que dans ce cas, des instabilités de type Rayleigh-Bénard sont impossibles sur des distances supérieures au centimètre.

Il est intéressant de regarder ce qui se passe dans le cas inverse, c'est-à-dire quand la salinité est plus élevée dans la couche supérieure. En effet, cette configuration peut s'obtenir lorsqu'on a de la formation de glace en surface. En effet, quand les cristaux de glace se forment, la salinité de l'eau dans leur voisinage immédiat augmente légèrement parce que le sel en solution initialement n'entre pas dans les cristaux [7]. Dans ce cas et pour un même gradient de salinité, il faudra seulement une différence de température de l'ordre de $0.1^\circ C$ sur une couche de 10 m. L'instabilité a donc beaucoup plus

de chance de s'opérer et ce jusqu'à une profondeur de 100 m car les effets de la température et de la salinité se rejoignent pour déstabiliser le fluide. On trouve donc une valeur proche des 50 mètres proposés comme valeur moyenne pour les courants de convection [7].

Conclusion et perspectives

Les régimes transitoires des écoulements de Taylor-Couette et de Rayleigh-Bénard sont des classiques de la mécanique des fluides que l'on peut appliquer aux fluides géophysiques par l'introduction du sel. Ils correspondent à des configurations réelles dont l'étude détaillée fait l'objet du présent rapport. L'observation de telles structures, du fait de leur ordre de grandeur, nécessiterait de faire des campagnes océanographiques. Il est donc essentiel de passer d'abord par une phase de modélisation.

A l'occasion de ce stage, on a résolu le problème de Taylor-Couette homogène par une méthode intégrale et on a retrouvé les résultats de la bibliographie [1]. Ensuite, on a ajouté l'influence de la stratification et appliqué le calcul à des conditions de laboratoire. Les résultats de Caton [3] ont été retrouvés avec une excellente précision. On s'est ensuite intéressé à des conditions réelles dans le cas de la rotation terrestre diurne. On a donc un modèle mathématique du phénomène ainsi que des codes numériques rapides basés sur des fonctions tabulaires (intégrales de fonctions circulaires rapidement convergentes, séries de Fourier) dont les résultats ont été présentés.

Dans un second temps, on a considéré le cas de l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Elle a été résolue dans le cas homogène pour lequel on a retrouvé les résultats de Chandrasekhar [1]. Dans le but de résoudre une configuration réelle de masse d'eau océanique comprise entre une couche de glace et une masse d'eau plus chaude, on a ajouté des stratifications stable et instable, ce qui constitue une nouveauté. Le modèle mathématique a été écrit et les résultats des calculs numériques ont été présentés.

Il est prévu de continuer à travailler sur le code de résolution de Taylor-Couette afin de pouvoir l'utiliser avec des stratifications plus fortes ainsi que de monter une expérience de Rayleigh-Bénard avec du sel au LUSIG avec les moyens d'acquisition Vidéo et de détermination de profils de vitesses, en s'appuyant sur les résultats théoriques du chapitre 4.

Bibliographie

- [1] S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Dover Publication, Inc. New York (1961).
- [2] B.L. Hua, D.W. Moore, S. Le Gentil. Inertial nonlinear equilibration of equatorial flows. *J. Fluid Mech.* vol. 331, p. 345 (1997)
- [3] F. Caton. Ecoulement de Taylor-Couette stratifié : Régimes, bifurcations et transport. *Thèse de Doctorat*, Université Joseph Fourier, Grenoble (1998)
- [4] P. Welander. Thermal oscillations in a fluid heated from below and cooled to freezing from above. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 1 :215-223 (1977)
- [5] H. Hochstadt. Les fonctions de la physique mathématique. Masson et cie (1973)
- [6] Y. Préaux. Mise en oeuvre d'une solution intégrale d'une équation de type Orr-Sommerfeld pour l'écoulement de Couette-Taylor. *T.E.R.*, LUSIG, IUT Brest (2003)
- [7] D. Hassani. Dynamique des glaces de mer. *Rapport de stage de DEA*, IRMAR, Université Rennes 1 (2004)

Annexe 1

Démonstration des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

La forme vectorielle de ces équations est :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{g} - \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu(\nabla^2\vec{u})$$

1. L'accélération

Soit le vecteur $\vec{P} = P_1\vec{i} + P_2\vec{j} + P_3\vec{k}$ alors dans un référentiel inertiel :

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_I = \frac{dP_1}{dt}\vec{i} + P_1\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dP_2}{dt}\vec{j} + P_2\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dP_3}{dt}\vec{k} + P_3\frac{d\vec{k}}{dt}$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_I = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega}_\wedge\vec{P}$$

On pose alors que $\vec{P} = \vec{u}$ la vitesse, on a donc :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_I = \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{\Omega}_\wedge\vec{u}$$

Or $\vec{\Omega}_\wedge\vec{u}$ peut se réécrire comme :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}_\wedge \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega u_\theta \\ \Omega u_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or comme $u_\theta = r\Omega$, on a donc :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}_\wedge \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_\theta^2}{r} \\ \frac{u_r u_\theta}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc l'accélération s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_z \end{aligned}$$

2. Le gradient

Il s'écrit comme suit :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right), \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

3. Le laplacien

Le laplacien vecteur en coordonnées cylindriques a une expression compliquée que nous allons calculer. On part de l'expression générale :

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla}_\wedge (\vec{\nabla}_\wedge \vec{u})$$

De plus, la divergence s'écrit comme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r), \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

Il faut donc écrire les termes $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$ et $\vec{\nabla}_\wedge (\vec{\nabla}_\wedge \vec{u})$. On a donc, en faisant la différence des deux termes que :

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \nabla^2 u_z \right)$$

$$\text{avec } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

4. L'équation de Navier-Stokes

Enfin on peut écrire les équations en coordonnées cylindriques comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu (\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu (\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_z &= -g - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu (\nabla^2 u_z) \end{aligned}$$

Annexe 2

Résolutions des problèmes de Taylor-Couette

1. Résolution du problème de Taylor-Couette homogène par transformée de Laplace

On se place dans le cas d'instabilités stationnaires ($\sigma = 0$), les équations (1.17) et (1.18) peuvent être regroupées en une équation unique en multipliant (1.17) par $-Ta^2$, on obtient :

$$(D^2 - a^2)^3 v = -Ta^2(1 + \alpha\zeta)v$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^6 v}{d\zeta^6} - 3a^2 \frac{d^4 v}{d\zeta^4} + 3a^4 \frac{d^2 v}{d\zeta^2} + (Ta^2(1 + \alpha\zeta) - a^6)v = 0$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{aligned} v &= 0 \text{ en } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = 1 \\ u &= 0 \Rightarrow D^2 v = 0 \text{ en } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = 1 \\ Du &= 0 \Rightarrow D(D^2 - a^2)v = 0 \text{ en } \zeta = 0 \text{ et } \zeta = 1 \end{aligned}$$

Le but est de trouver pour chaque a donné la valeur du nombre de Taylor T associée. Pour cela, on utilise une méthode de résolution par une méthode proche de celle de la transformation de Laplace. On pose $v = \int e^{\zeta t} \bar{v}(t) dt$ et de ce fait $\frac{d^n}{d\zeta^n} v = \int t^n e^{\zeta t} \bar{v}(t) dt$. L'équation différentielle devient alors dans l'espace des t une équation du sixième degré à coefficients non constants.

L'équation (2.18) s'écrit dans l'espace des t :

$$\int (t^6 - 3a^2 t^4 + 3a^4 t^2 + Ta^2 - a^6) e^{\zeta t} \bar{v}(t) dt = -\alpha Ta^2 \int \zeta e^{\zeta t} \bar{v}(t) dt$$

On transforme les intégrales du second membre de sorte à éliminer la multiplication par ζ :

$$\int \zeta e^{\zeta t} \bar{v} dt = \int \left(\frac{d}{dt} (e^{\zeta t} \bar{v}) - e^{\zeta t} \frac{d\bar{v}}{dt} \right) dt$$

Il reste donc que :

$$\begin{aligned} & \int [(t^6 - 3a^2t^4 + 3a^4t^2 + Ta^2 - a^6)e^{\zeta t\bar{v}}(t) - \alpha Ta^2 e^{\zeta t} \frac{d\bar{v}}{dt}] dt \\ & = -\alpha Ta^2 \int \frac{d}{dt} (e^{\zeta t\bar{v}}(t)) dt \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe t_1 et t_2 tels que :

$$[e^{\zeta t\bar{v}}]_{t_1}^{t_2} = 0$$

alors on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} [(t^6 - 3a^2t^4 + 3a^4t^2 + Ta^2 - a^6)e^{\zeta t\bar{v}} - \alpha Ta^2 e^{\zeta t} \frac{d\bar{v}}{dt}] dt = 0$$

Comme l'intégrale est nulle si l'intégrande est nulle, on peut se ramener à l'équation suivante :

$$(t^6 - 3a^2t^4 + 3a^4t^2 + Ta^2 - a^6)\bar{v} - \alpha Ta^2 \frac{d\bar{v}}{dt} = 0$$

Dont la solution est :

$$\bar{v} = k \cdot \exp\left(\frac{-\frac{t^7}{7} + 3a^2\frac{t^5}{5} - a^4t^3 - (Ta^2 - a^6)t}{-\alpha Ta^2}\right)$$

et donc dans l'espace réel :

$$v(\zeta) = k \int_{t_1}^{t_2} e^{\zeta t} \exp\left(\frac{-\frac{t^7}{7} + 3a^2\frac{t^5}{5} - a^4t^3 - (Ta^2 - a^6)t}{-\alpha Ta^2}\right) dt$$

avec t_1 et t_2 satisfaisant $[e^{\zeta t\bar{v}}]_{t_1}^{t_2} = 0$.

Or quand $t \rightarrow \infty$, le comportement est régi par celui de t^7 , on va donc intégrer dans le plan complexe suivant des contours d'arguments $\frac{2k\pi}{7}$. Soient D_1, D_2 et D_3 les droites d'arguments respectifs $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$ et $\frac{6\pi}{7}$ ainsi que C_1, C_2 et C_3 les contours entre Ot et respectivement D_1, D_2 et D_3 . D'après le théorème de Cauchy :

$$\begin{aligned} & \int_{Ot} e^{\zeta t} \exp\left(\frac{-\frac{t^7}{7} + 3a^2\frac{t^5}{5} - a^4t^3 - (Ta^2 - a^6)t}{-\alpha Ta^2}\right) dt \\ & + \int_{C_1} e^{\zeta t} \exp\left(\frac{-\frac{t^7}{7} + 3a^2\frac{t^5}{5} - a^4t^3 - (Ta^2 - a^6)t}{-\alpha Ta^2}\right) dt \\ & + \int_{D_1} e^{\zeta t} \exp\left(\frac{-\frac{t^7}{7} + 3a^2\frac{t^5}{5} - a^4t^3 - (Ta^2 - a^6)t}{-\alpha Ta^2}\right) dt = 0 \end{aligned}$$

On intègre numériquement la première et la troisième intégrale pour obtenir la seconde par différence. On fait de même pour les contours C_2 et C_3 , on obtient alors six solutions linéairement indépendantes (3 parties réelles et 3 parties imaginaires) v_1 à v_6 . On a donc :

$$v_0 = \int_0^{+\infty} e^{\zeta t} \exp\left(\frac{-\frac{t^7}{7} + 3a^2\frac{t^5}{5} - a^4t^3 - (Ta^2 - a^6)t}{-\alpha Ta^2}\right) dt$$

$$v_1 = -v_0 + \int_0^{+\infty} N_1 \cos(M_1) dt$$

$$v_2 = \int_0^{+\infty} N_1 \sin(M_1) dt$$

$$v_3 = -v_0 + \int_0^{+\infty} N_2 \cos(M_2) dt$$

$$v_4 = \int_0^{+\infty} N_2 \sin(M_2) dt$$

$$v_5 = -v_0 + \int_0^{+\infty} N_3 \cos(M_3) dt$$

$$v_6 = \int_0^{+\infty} N_3 \sin(M_3) dt$$

Avec les N_i et les M_i tels que :

$$N_i = \exp\left[\cos\left(\frac{2i\pi}{7}\right)\zeta t + \frac{1}{-\alpha Ta^2}\left(-\frac{t^7}{7} + \frac{3}{5}a^2t^5 \cos\left(\frac{10i\pi}{7}\right) - a^4t^3 \cos\left(\frac{6i\pi}{7}\right) + (a^6 - Ta^2) \cos\left(\frac{2i\pi}{7}\right)t\right)\right]$$

$$M_i = \sin\left(\frac{2i\pi}{7}\right)\zeta t + \frac{1}{-\alpha Ta^2}\left(\frac{3}{5}a^2t^5 \sin\left(\frac{10i\pi}{7}\right) - a^4t^3 \sin\left(\frac{6i\pi}{7}\right) + (a^6 - Ta^2) \sin\left(\frac{2i\pi}{7}\right)t\right) + \frac{2i\pi}{7}$$

On soumet ces six solutions aux conditions aux limites, ce qui donne une matrice (6, 6) dont le déterminant s'annule pour la valeur correcte de T . Voici enfin quelques exemples de courbes de stabilité obtenues pour des ratios de rotation des cylindres de respectivement -0.25 , -0.5 et -0.75

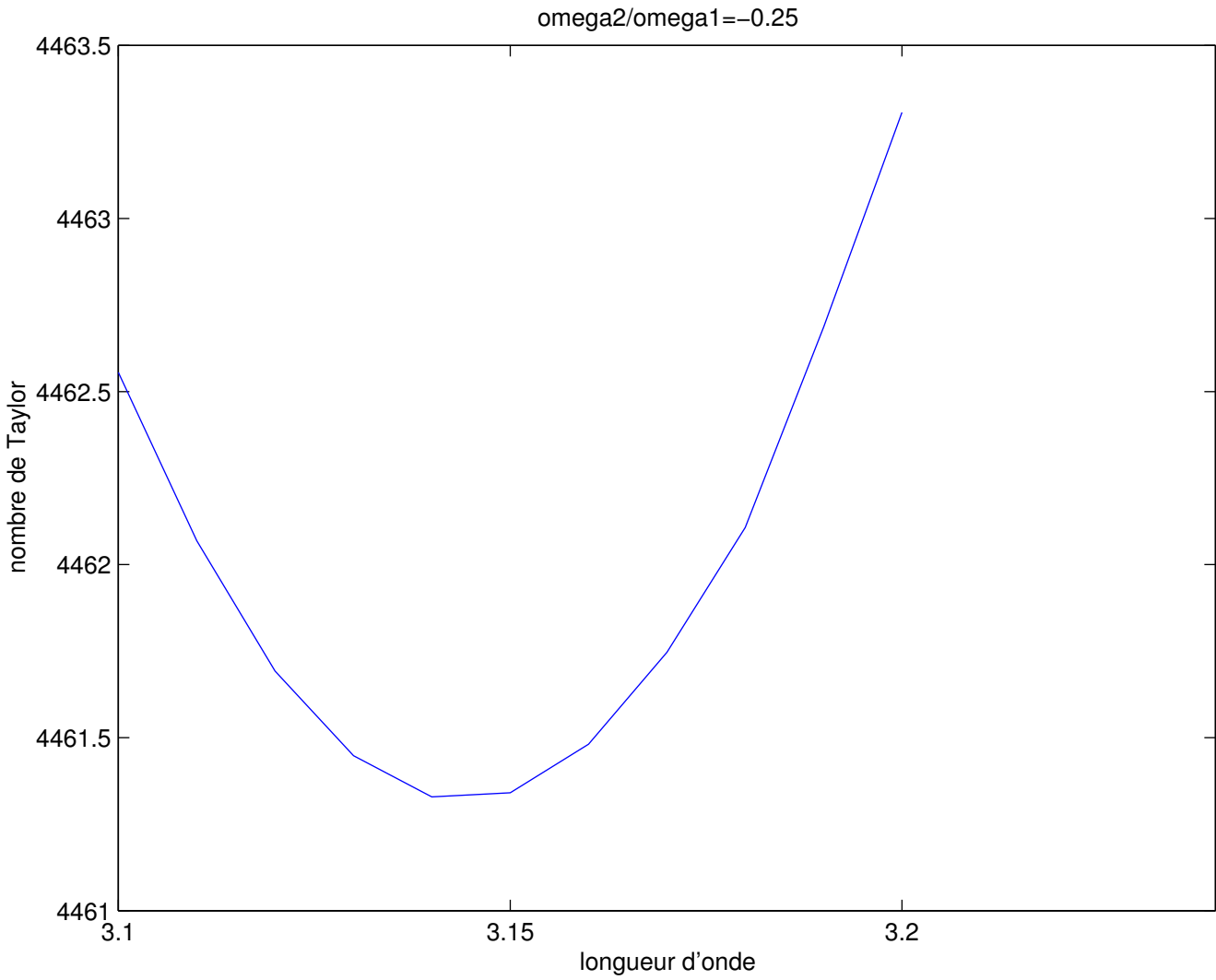


FIG. 4.1 – Courbe de stabilité marginale d'un écoulement de Taylor-Couette homogène, ratio $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = -0.25$.

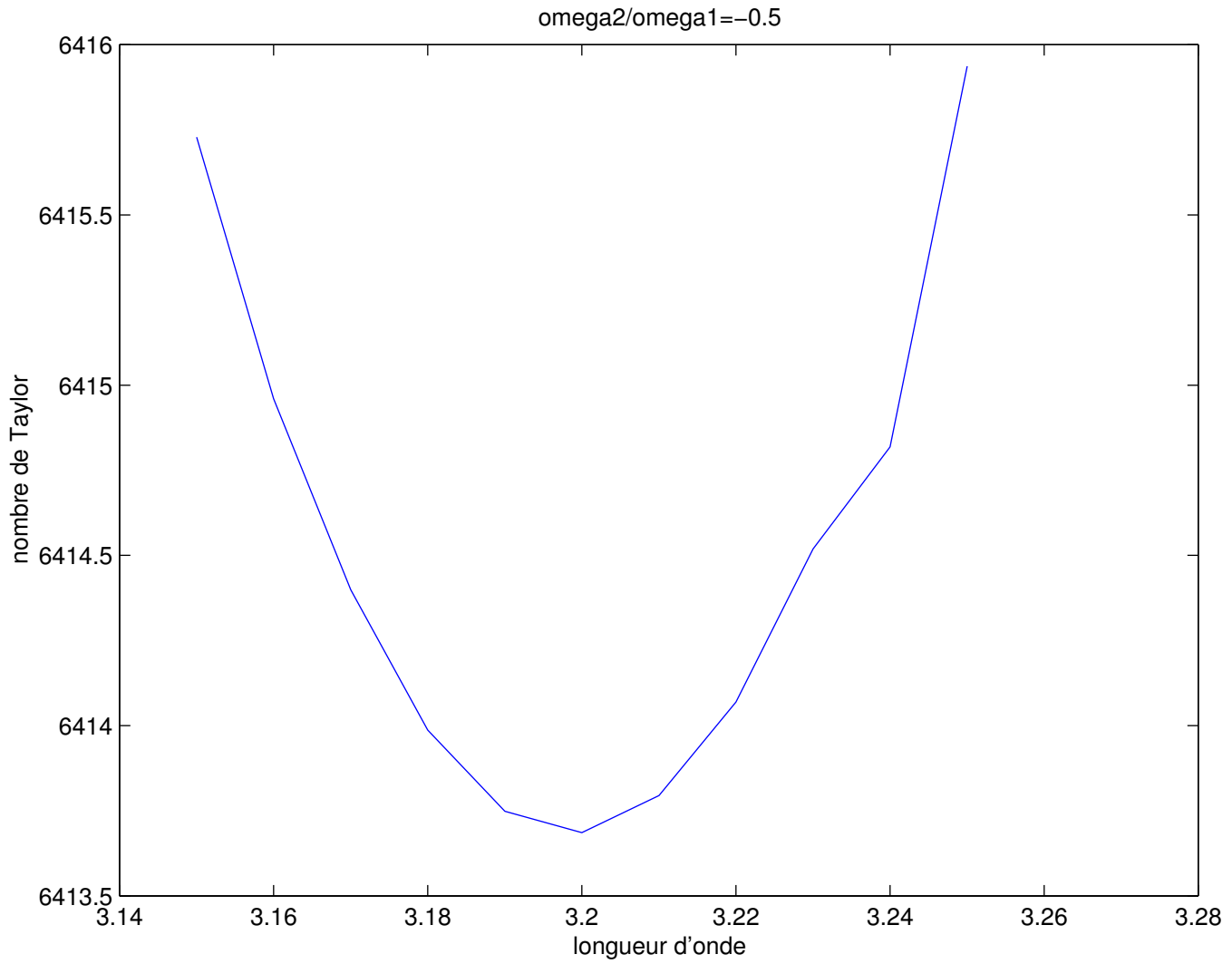


FIG. 4.2 – Courbe de stabilité marginale d'un écoulement de Taylor-Couette homogène, ratio $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = -0.5$.

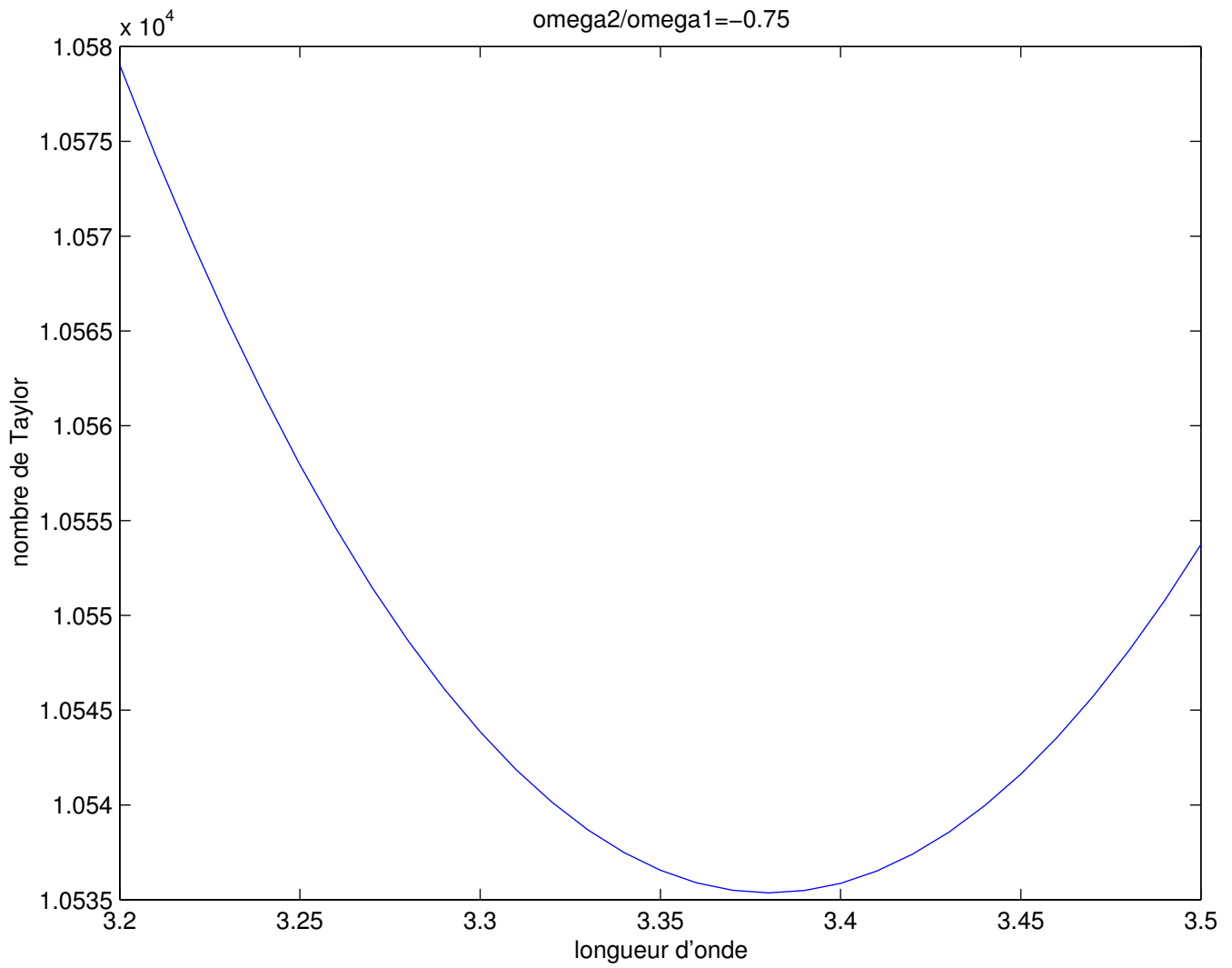


FIG. 4.3 – Courbe de stabilité marginale d'un écoulement de Taylor-Couette homogène, ratio $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = -0.75$.

2. Résolution du problème de Taylor-Couette stratifié par les séries de Fourier

Les dérivées paires de v devant être nulles pour $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$, on développe alors v en série de Fourier de la forme $v = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(m\pi\zeta)$

L'équation homogène $((D^2 - a^2 - i\sigma)(D^2 - a^2) + i\frac{G}{\sigma}D^2)u = 0$ a pour solution :

$$u_{\text{homo}}^m = C_m(A_1^m sh(\alpha_1\zeta) + A_2^m sh(\alpha_2\zeta) + A_3^m ch(\alpha_1\zeta) + A_4^m ch(\alpha_2\zeta))$$

avec les coefficients suivants :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (\alpha^2 + \rho + \sqrt{(\rho^2 - i\alpha^2\frac{G}{\sigma})})^{\frac{1}{2}} \\ \alpha_2 &= (\alpha^2 + \rho - \sqrt{(\rho^2 - i\alpha^2\frac{G}{\sigma})})^{\frac{1}{2}} \\ \rho &= \frac{i}{2}(\sigma + \frac{G}{\sigma})\end{aligned}$$

La solution particulière est :

$$u_{\text{part}} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m [A_m(1 - \zeta)\sin(m\pi\zeta) + B_m\cos(m\pi\zeta)]$$

Les coefficients A_m et B_m sont déterminés par les conditions aux limites sur u , on obtient alors :

$$\begin{aligned}A_m &= \frac{1}{(m^2\pi^2 + \alpha^2)^2 + i(m^2\pi^2(\sigma^2 - G)\sigma + \sigma\alpha^2)} \\ B_m &= -2A_m^2 m\pi(2(\alpha^2 + m^2\pi^2) - i(\frac{G}{\sigma} - \sigma))\end{aligned}$$

d'où la solution totale pour u :

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_m (A_i^m sh(\alpha_i\zeta) + B_i^m ch(\alpha_i\zeta) + A^m(1 - \zeta)\sin(m\pi\zeta) + B_m\cos(m\pi\zeta))$$

$u = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0$ donnent les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \cosh(\alpha_2) - \cosh(\alpha_1) \\
\delta_2 &= \alpha_2 \sinh(\alpha_2) - \alpha_1 \sinh(\alpha_1) \\
\delta_3 &= \cosh(\alpha_1) - (-1)^m \\
A_1^m &= \frac{B_m(\alpha_1 \alpha_2 \delta_1 \sinh(\alpha_1) - \alpha_2 \delta_3 \delta_2) A_m m \pi (\alpha_2 \delta_1 \cosh(\alpha_2) - \delta_2 \sinh(\alpha_2))}{\delta_2(\alpha_1 \sinh(\alpha_2) - \alpha_2 \sinh(\alpha_1)) - \alpha_1 \alpha_2 \delta_1^2} \\
A_2^m &= -\frac{A_m m \pi + \alpha_1 A_1^m}{\alpha_2} \\
B_1^m &= -(B_m + B_2^m) \\
B_2^m &= \frac{B_m \delta_3 - A_1^m \sinh(\alpha_1) - A_2^m \sinh(\alpha_2)}{\delta_1}
\end{aligned}$$

Pour avoir la vitesse orthoradiale v , il faut résoudre numériquement l'équation :

$$\left\| \sum_{i=1}^2 \left[\frac{n\pi(A_i^m(-1)^{n+1}\sinh(\alpha_i) + B_i^m((-1)^{n+1}\cosh(\alpha_i) + 1))}{(\alpha_i^2 + n^2\pi^2)} \right] + X_{mn} - \frac{m^2\pi^2 + \alpha^2 + i\sigma}{2\alpha^2 T} \right\| = 0$$

avec $X_{mn} = \frac{A_m}{4}$ si $m = n$, $\frac{n}{\pi(n^2-m^2)}(\frac{4mA_m}{\pi(n^2-m^2)} + 2B_m)$ si $m + n$ impair et 0 si $m + n$ pair.

Annexe 3

Programmes Mathematica et Matlab

1. Résolution par Mathematica de l'équation (3.10)
2. Codes Matlab