

Rapport de stage de master 1

Equation Shallow Water

Jérémy COLLIN

Encadrant Thierry HUCK

Laboratoire de Physique des Océans

31 juillet 2012

master 1 mathématiques de la modélisation et du calcul scientifique de l'université de Rennes 1

Table des matières

1	Modèles Shallow Water	1
1.1	Principe	1
1.2	Equations Shallow Water	2
2	Programmation des Equations Shallow Water	3
2.1	Résultats	4
3	Equations Shallow Water linéarisées	4
3.1	Théorie	4
3.2	Utilisation d'ARPACK	8
3.3	La pratique	9
4	Modèle Shallow Water n_z couches	10
4.1	Equations Shallow Water n_z couches	10
4.2	Programmation	11
4.3	Résultats	13
5	Outcropping	13
5.1	Distribution des forçages	13
5.1.1	Distribution du forçage en vent	13
5.1.2	Distribution du forçage en masse	16
5.2	Schéma Upstream	17
5.3	Schéma TVD	18
5.4	Schéma FCT	18

Introduction

Les fluides et en particulier les océans sont régis par des équations aux dérivées partielles. Afin de bien comprendre la physique des océans il est intéressant de résoudre numériquement ces équations. Le sujet de ce stage a pour but dans un premier temps de prendre un modèle Shallow-Water 2 couches simplifié [4] et d'y ajouter le terme non linéaire d'advection pour l'adapter à des expériences plus petites-échelles. Le codage de ce terme a été fait de manière à ce qu'il ne contribue pas à l'énergie cinétique totale. Une fois ce terme ajouté, il est intéressant d'écrire les équations linéarisées pour en extraire les valeurs propres et vecteurs propres du jacobien. Le but étant de simuler les expériences observées dans [3] et de retrouver les modes instables.

Dans un deuxième temps il sera intéressant de passer au modèle à n_z couches. Le but étant de permettre qu'une ou plusieurs couches puissent avoir une épaisseur nulle ou très faible. Ce phénomène appelé outcropping engendre des difficultés de résolution numériques (épaisseur de couche négative, blow-up).

1 Modèles Shallow Water

1.1 Principe

On représente l'océan en couches d'épaisseurs variables et on considère que chaque couche possède une masse volumique constante. Ce qui correspond en fait à une température constante. voir [2] pour la salinité (échelles). On peut prendre en compte la topographie, les forçages en vent, flux de masse ou de chaleur. On peut voir un exemple de modèle Shallow Water à une couche dans la Figure[1].

1. Avantage : cela permet de ne pas traiter les variables de température et de salinité [2] qui sont moteurs des équations de mouvements des fluides.

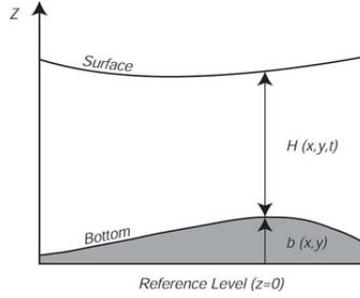


FIGURE 1 – Exemple de modèle Shallow Water à une couche

2. Difficulté : Lors de forçages trop importants l'épaisseur de certaines couches peut disparaître ce qui amène des difficultés de résolution numériques (couches qui disparaissent [5] voir d'épaisseur négative).

Chaque couche est ensuite discrétisée par une grille 2-D appelée grille C [1], en sphérique ou en carthésien selon les hypothèses.

1.2 Equations Shallow Water

Les équations shallow water simplifiées et codées dans sw.f90 [4] sont :

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla (g(h + z_b)) + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - r \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\partial_t h + \text{div} (h \mathbf{u}) = \mathcal{W}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

- h : hauteur d'eau
- $\mathbf{u} = (u, v)$: vitesses horizontales
- $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$: débit massique (forçage puit/source expérience de steven)
- z_b : topographie
- g : la gravité à la surface
- \mathbf{k} : vecteur vertical unitaire
- ν : viscosité dynamique
- r : le coefficient de friction linéaire

La simplification est faite sur le terme (non linéaire) d'advection qui est négligeable devant les autres termes pour une échelle océanique. Ce modèle a été codé en Fortran par Thierry Huck et s'avère efficace pour étudier des circulations océaniques grandes échelles. Cependant pour observer de plus petites échelles il n'est pas assez précis. En effet lors des simulations numériques des expériences sur tables tournantes [3] tous les modes sont amorties alors que les observations montrent qu'il y a une instabilité. Ceci nous donne l'équation suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \xi \mathbf{k} \times (h \mathbf{u}) + \nabla \left(g(h + z_b) + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \nu \Delta \mathbf{u} - r \mathbf{u} \quad (3)$$

$$\partial_t h + \text{div} (h \mathbf{u}) = \mathcal{W}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

- $\xi = \frac{\text{rot}(u)+f}{h}$ vorticité potentielle

En projetant sur x, y, z , et dans l'approximation qu'on est en coordonnées carthésiennes et non sphériques, rappelons que $\mathbf{u} = (u, v)$ on obtient :

$$\partial_t u = \xi h v - \partial_x \left(g(h + z_b) + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) + \nu \Delta u - r u \quad (5)$$

$$\partial_t v = -\xi h u - \partial_y \left(g(h + z_b) + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) + \nu \Delta v - r v \quad (6)$$

$$\partial_t h = \mathcal{W}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) - \text{div} (h \mathbf{u}) \quad (7)$$

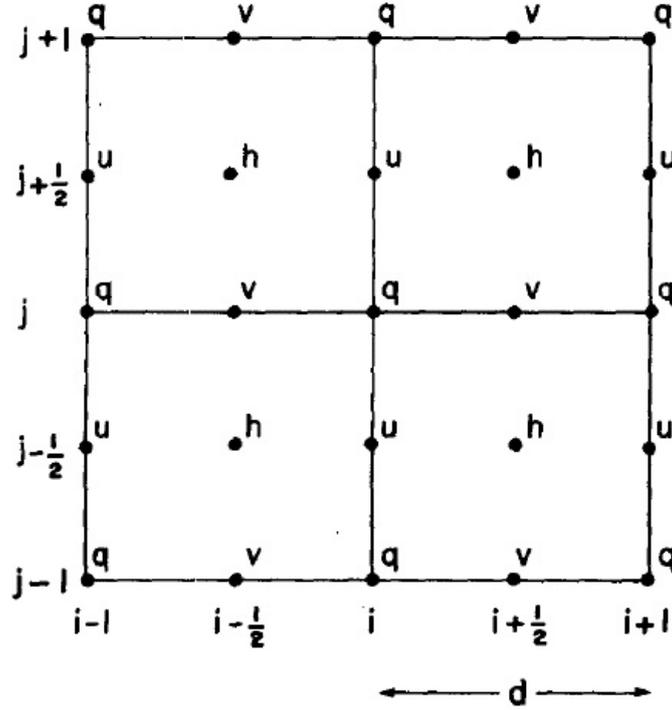


FIGURE 2 – The staggering of the variables based on the C grid to be used in the derivation of the square grid version of the energy conserving scheme (Arakawa and Lamb 1981).

Maintenant on va s'intéresser aux contributions du terme advectif et à l'ajout du terme de Coriolis dans la vorticité potentielle. Les autres contributions faisant déjà partie de sw.f90

Notations :

On notera donc $\partial_t \tilde{u}$, $\partial_t \tilde{v}$, les contributions de ces termes aux équations de mouvement

En projetant sur x , y , z , on obtient :

$$\partial_t \tilde{u} = \xi h v - \partial_x \left(\frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) \quad (8)$$

$$\partial_t \tilde{v} = -\xi h u - \partial_y \left(\frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) \quad (9)$$

Le but est donc de développer le schéma numérique ci-dessus sur une grille C type Arakawa [1]. Pour un soucis de rigueur et de cohérence avec d'éventuelles simulations longue durée nous avons utilisé la formulation Sadourny [6] pour programmer le terme advectif. Ainsi la contribution de ce terme à l'énergie cinétique totale du système est nulle.

2 Programmation des Equations Shallow Water

La première étape a été de passer le modèle multi-couches à une couche. Puis de coder les termes $\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right)$ et $\xi \mathbf{k} \times h \mathbf{u}$ sur la grille C, tout en conservant l'énergie cinétique. Pour assurer la conservation de l'énergie cinétique il faut coder les termes $rot(u)$ et f aux mêmes points.

On suit les notations de Sadourny (1975) pour la formulation du schéma aux différences finies

$$\delta_x q = \frac{1}{d} \left[q \left(x + \frac{d}{2}, y \right) - q \left(x - \frac{d}{2}, y \right) \right], \quad (10a)$$

$$\delta_y q = \frac{1}{d} \left[q(x, y + \frac{d}{2}) - q(x, y - \frac{d}{2}) \right], \quad (10b)$$

$$\bar{q}^x = \frac{1}{2} \left[q(x + \frac{d}{2}, y) + q(x - \frac{d}{2}, y) \right], \quad (10c)$$

$$\bar{q}^y = \frac{1}{2} \left[q(x, y + \frac{d}{2}) + q(x, y - \frac{d}{2}) \right]. \quad (10d)$$

Les termes de transport sont définis aux mêmes points que leur composante cinétique :

$$U = \bar{h}^x u ; V = \bar{h}^y v. \quad (11)$$

L'opérateur gradient va agir sur une quantité H_a définie aux mêmes points que la hauteur de fluide h :

$$H_a = \frac{1}{2} \left(\overline{u^2}^x + \overline{v^2}^y \right). \quad (12)$$

La vorticité potentielle est définie dans les coins du maillage Figure[2] par :

$$\xi = \frac{\delta_x v - \delta_y u + f}{\overline{h}^{xy}}. \quad (13)$$

Les termes ajoutés aux équations Shallow Water sont donc

$$\partial_t \tilde{u} = \overline{\xi V}^{xy} - \delta_x H_a, \quad (14)$$

$$\partial_t \tilde{v} = -\overline{\xi U}^{yx} - \delta_y H_a, \quad (15)$$

2.1 Résultats

Déjà sur des expériences en bassin océaniques on peut observer de légères différences entre les modèles linéaires et non-linéaires Figure [3].

Mais dès que l'on se situe sur des échelles spatiales plus petites le terme d'advection devient essentiel. Ici on montre les différences entre les fonctions de courants et les élévations de la surface à l'équilibre Figures[4]-[5]-[6]-[7].

- table 50cm × 50cm
- forçage 100ml.min⁻¹
- pente

De plus on trouve bien une instabilité de l'énergie cinétique dans le cadre des expériences en table tournante [[3]] Figures [8][9]

3 Equations Shallow Water linéarisées

3.1 Théorie

Dans l'article de Steven, Antoine et Alain [3], on observe une instabilité, soit un mode non amorti. Il est possible de retrouver ces modes en calculant les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice jacobienne des équations de mouvement.

soit X' une perturbation autour de l'état moyen \bar{X} , alors sa réponse temporelle sera de la forme :

$$\partial_t X' = AX', \quad X' = (h', u', v'), \quad A \text{ jacobien des équations Shallow Water} \quad (16)$$

$$\Rightarrow X'(\tau) = X'_0 e^{A \cdot \tau} = M(\tau) X'_0, \quad M : \text{Propagateur} \quad (17)$$

Pour rechercher un mode instable il suffit de trouver X' tel que :

$$\partial_t X' = \lambda X', \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (18)$$

$$Re(\lambda) < 0 \Rightarrow \text{oscillations amorties}$$

$$Re(\lambda) > 0 \Rightarrow \text{mode instable!}$$

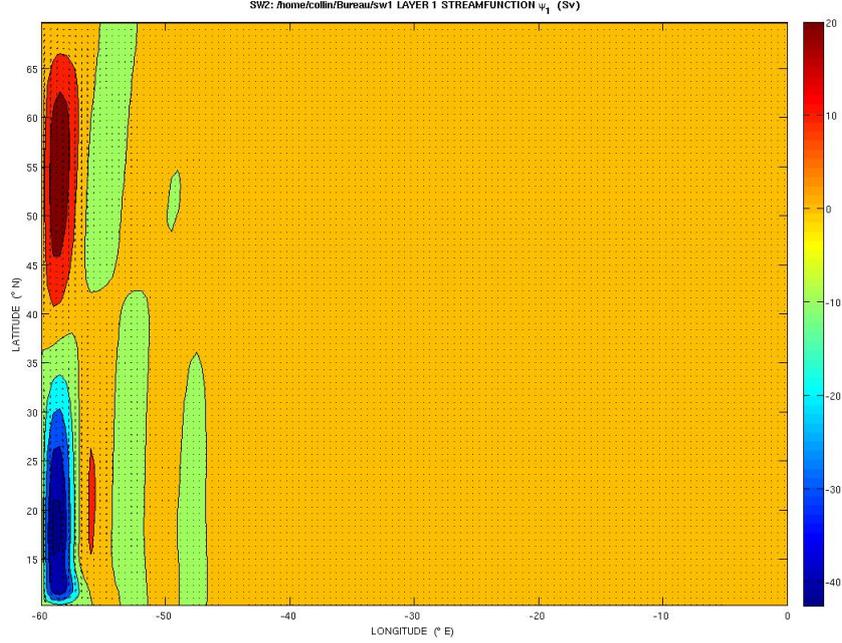


FIGURE 3 – Différence entre les fonctions de courants pour les schémas advectif et non advectif. Application en bassin océanique, forçage en vent, sans topographie

Afin de filtrer certaines ondes rapides on ne calculera pas les valeurs propres et vecteurs propres du jacobien mais ceux du jacobien intégré sur un temps τ à la fois long devant la période des ondes qui ne nous intéressent pas (ondes rapides de gravité) et court devant celles qui nous intéressent.

ARPACK est une bibliothèque Fortran qui calcule les vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice. ARPACK fournit $X'(t=0)$ de manière aléatoire, puis on lui fournit $X'(t=\tau) = X'_0 \cdot e^{A \cdot \tau}$ en faisant d'abord un schéma d'Euler explicite, puis un schéma leapfrog corrigé : On utilise donc la bibliothèque ARPACK pour calculer les vecteurs propres et valeurs propres de $e^{A \cdot \tau}$, avec pour option de trouver les valeurs propres à partie réelle la plus grande possible (cas des ondes non amorties).

soit (λ, X) un couple de valeur propre, vecteur propre de A alors

$$e^{A \cdot \tau} \cdot X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} A^n \cdot X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau \cdot \lambda)^n}{n!} X = e^{\lambda \cdot \tau} \cdot X \quad (19)$$

$\Rightarrow (e^{\lambda \cdot \tau}, X)$ est un couple de vecteur propre, valeur propre de $e^{A \cdot \tau}$

Soit (μ, X) un couple de vecteur propre, valeur propre de $e^{A \cdot \tau}$ Alors

$$(\lambda, X) \text{ couple de vecteur propre de } A, \quad \lambda = \frac{\ln(|\mu|) + i \arg(\mu)}{\tau} \quad (20)$$

On recherche les modes instables donc les valeurs propres de A de partie réelle la plus grande possible. Pour cela nous utilisons ARPACK comme suit : ARPACK nous donnant les valeurs propres μ de $e^{A \cdot \tau}$, les valeurs propres de A étant $\lambda =$

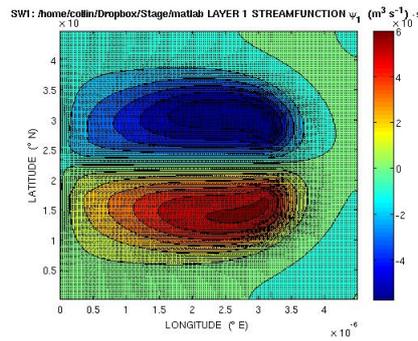


FIGURE 4 – Fonction de courant du schéma advectif. Bassin $50cm \times 50cm$, $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = 100ml.m^{-1}$

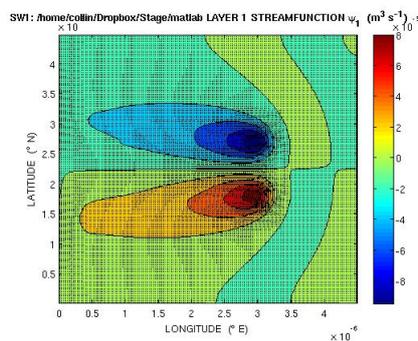


FIGURE 5 – Fonction courant du schéma non advectif. Bassin $50cm \times 50cm$, $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = 100ml.m^{-1}$

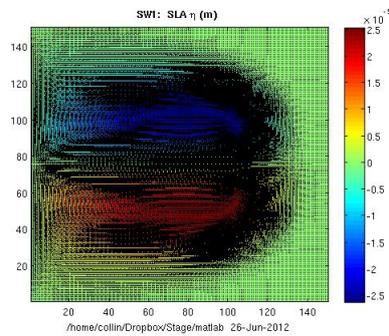


FIGURE 6 – Elevation en surface et vitesses à l'équilibre, schéma advectif. Bassin $50cm \times 50cm$, $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = 100ml.m^{-1}$

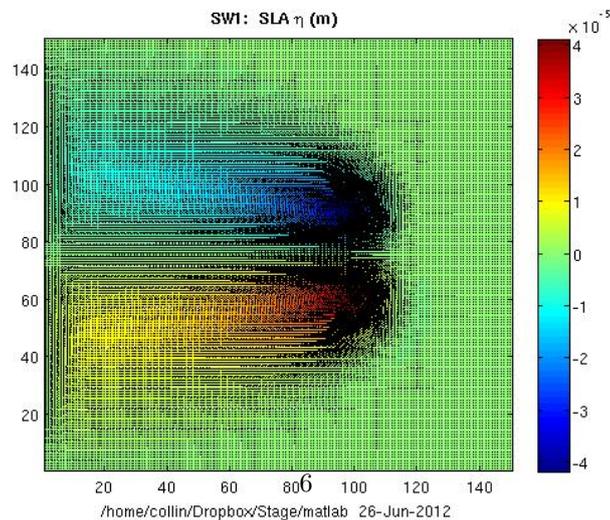


FIGURE 7 – Elevation en surface et vitesses à l'équilibre, schéma non-advectif. Bassin $50cm \times 50cm$, $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = 100ml.m^{-1}$

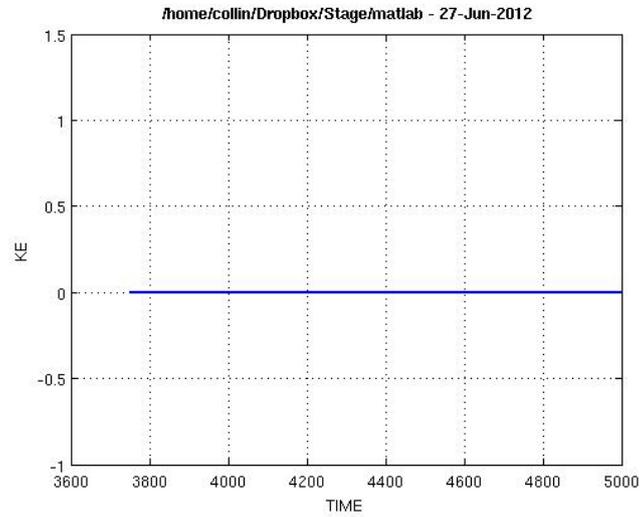


FIGURE 8 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique en fin de simulation. Expérience table tournante, $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = +100ml$, schéma sans terme d'advection

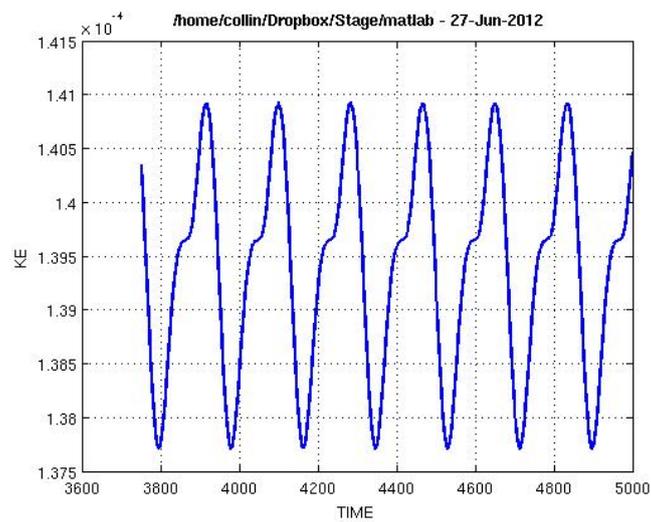


FIGURE 9 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique en fin de simulation. Expérience table tournante, $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = +100ml$, schéma advectif

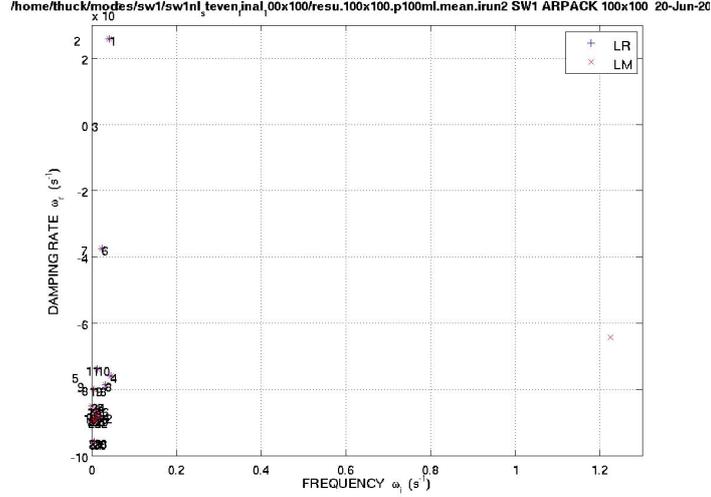


FIGURE 10 – Analyse de stabilité des valeurs propres avec les options 'LM' et 'LR' d'ARPACK, dans le cadre des observations de Steven, Antoine et Alain [3]. bassin 50cm×50cm, forçage 100ml/min.

$$\frac{\ln(|\mu|) + i \arg(\mu)}{\tau}$$

on cherche donc les valeurs propres μ de plus grands modules.

Notons $\mu = \mu_r + i \frac{2\pi}{\omega}$, ω est en fait la période du mode recherché, alors pour $\frac{2\pi}{\omega} \tau \ll 1$ on peut considérer que $|\mu| \simeq \text{Re}(\mu)$ et utiliser l'option ARPACK pour rechercher la valeur propre de partie réelle la plus grande. Nous avons fait ce choix pour filtrer les ondes rapides et optimiser le temps de calcul.

La période des ondes observées est de l'ordre de 100 à 300s $\Rightarrow \tau \ll \frac{50}{\pi}$ s. Dans nos expériences nous avons testé $\tau \in [0.5s, 4s]$ et nous retrouvons bien le même mode instable pour chaque temps d'intégration Figure[11], ce qui confirme notre théorie. La seule différence avec l'option 'LM' est que l'on retrouve un mode instable mais de période très courte Figure[10].

3.2 Utilisation d'ARPACK

Pour utiliser ARPACK nous n'avons pas besoin de calculer explicitement la matrice A mais juste un produit $A.X'$ $X' = (u', v', h')$ étant une perturbation autour de l'état moyen donnée de manière aléatoire par ARPACK. Nos simulations nous ayant donné un état moyen à l'équilibre on fournit donc $A.X'$ à ARPACK comme suit :

notons :

- u, v, h, ξ les états moyens à l'équilibre
- u', v', h' les perturbations
- $V = hv, U = hu$
- $H_a = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$

NB : ici \tilde{A} représente la partie de la matrice jacobienne avec les contributions advectives et grille f les autres parties ont déjà été codées par Thierry.

Alors d'après (8)-(9) on a $\tilde{A}.X' =$

$$\partial_t \tilde{u}' = \xi' V + \xi V' - \partial_x H'_a \quad (21)$$

$$\partial_t \tilde{v}' = \xi' U + \xi U' - \partial_y H'_a \quad (22)$$

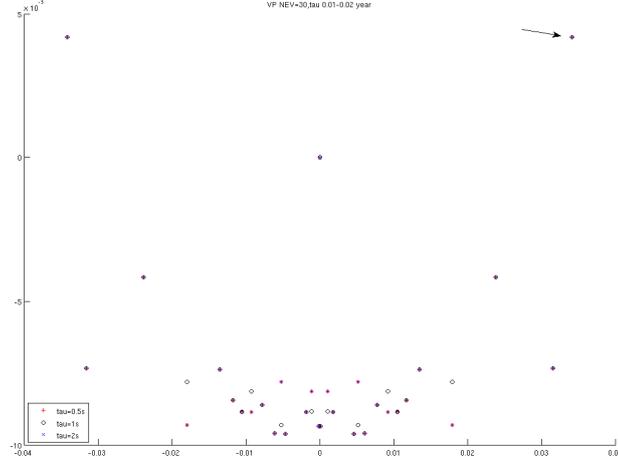


FIGURE 11 – Analyse de stabilité des valeurs propres pour 3 temps d’intégration 0.5s, 1s et 2s dans le cadre des observations de Steven, Antoine et Alain [3]. bassin 50cm×50cm, forçage 100ml/min.

$$U' = (u.h)' = u'h + uh' \quad V' = v'h + vh' \quad (23)$$

$$\xi' = \frac{rot(u)'}{h} + \frac{rot(u)}{h'} = \frac{rot(u') - \xi h'}{h} \quad (24)$$

$$H'_a = uu' + vv' \quad (25)$$

Avec les équations linéarisées on calcule donc grâce à ARPACK les vecteurs propres et valeurs propres de $e^{A \cdot \tau}$ de plus grandes parties réelles. Ensuite on calcule les valeurs propres de A comme définies dans (20).

3.3 La pratique

Maintenant que nous avons écrit les équations Shallow Water linéarisées, nous allons les coder de manière à respecter la formulation de Sadourny [6].

On reprend les notations : (11), (12), (13)

$$\partial_t \tilde{u}' = \xi \overline{V'}^{x^y} + \overline{\xi'} \overline{V'}^{x^y} - \delta_x H'_a \quad (26)$$

$$\partial_t \tilde{v}' = -\xi \overline{U'}^{y^x} - \overline{\xi'} \overline{U'}^{y^x} - \delta_y H'_a \quad (27)$$

$$U' = \overline{h}^x u' + \overline{h'}^x u \quad V' = \overline{h}^y v' + \overline{h'}^y v' \quad (28)$$

$$H'_a = \overline{uu'}^x + \overline{vv'}^y \quad (29)$$

$$\xi' = \left(\delta_x v' - \delta_y u' - \xi \cdot \overline{h'}^{y^x} \right) \cdot \frac{1}{\overline{h}^{y^x}} \quad (30)$$

On observe bien un mode instable et le même pour chaque temps d’intégration, toutes les autres valeurs propres ont une partie réelle négative. Cela correspond aux observations réalisées par Steven, Antoine et Alain dans [3].

Pour ce qui est de la partie ”optimisation” les expériences semblent montrer que le temps d’intégration du modèle linéarisé idéal est de 2s pour ce qui est du temps de calcul. Il semblerait qu’ARPACK ait plus de difficultés à converger pour τ trop proche de zero, ce qui correspond en fait à des valeurs propres proches les unes des autres.

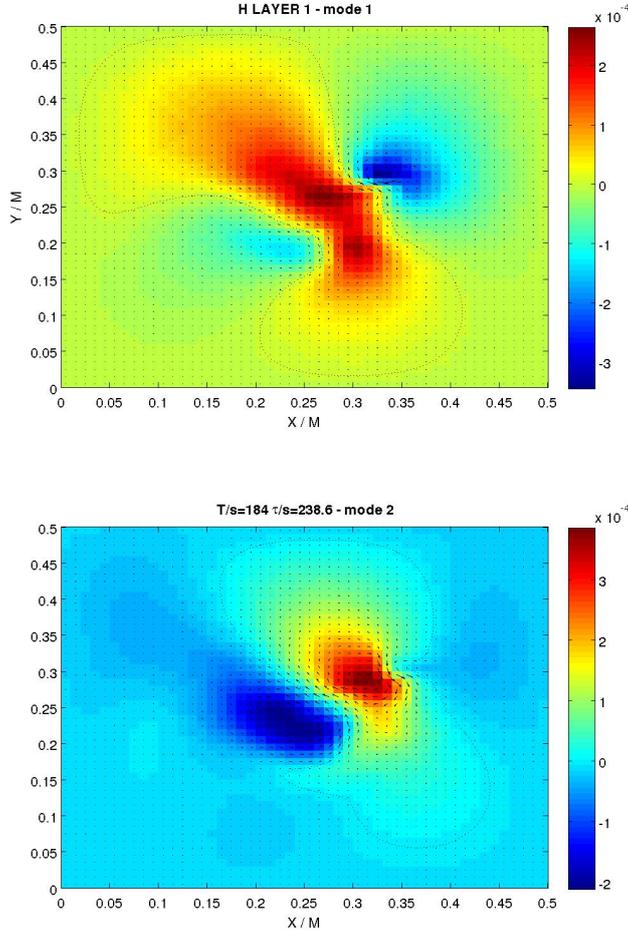


FIGURE 12 – Mode instable calculé avec l’option ‘LR’ d’ARPACK. bassin 50cm×50cm, forage 100ml/min.

Une fois les valeurs propres et vecteurs propres calculés, Thierry s’est intéressé aux modes instables en les simulant Figures [14]-[12]. On a $X(t) = X_0 \cdot e^{\lambda_r \cdot t} \cdot \cos(\frac{2\pi}{\omega} t)$ que l’on peut observer en traçant les modes calculés avec ARPACK ??.

4 Modèle Shallow Water n_z couches

4.1 Equations Shallow Water n_z couches

La seconde étape de ce stage est de permettre au modèle Shallow Water d’avoir un nombre n_z de couches. Chaque coue ayant sa propre densité ρ_k , $k = 1, \dots, n_z$. D’après l’équilibre hydrostatique on a :

$$\partial_z P = -\rho g, \quad \text{avec } \rho = \rho_k, \text{ pour } z \text{ dans la couche } k \quad (31)$$

$$\Rightarrow P_k = \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l g h_l + \rho_k g \left(z b + \sum_{l=k}^{n_z} h_l \right) + K_c \quad (32)$$

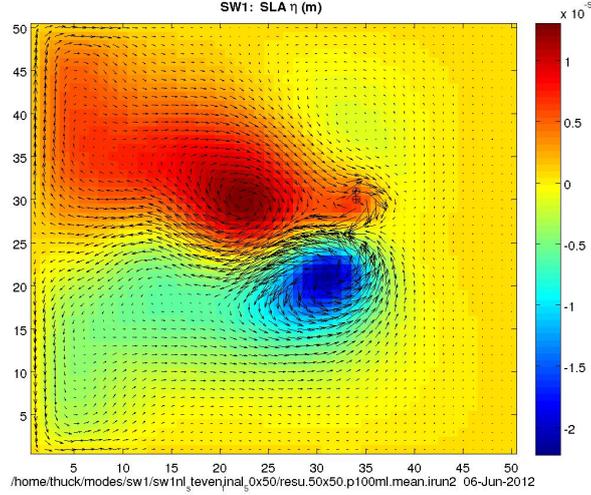


FIGURE 13 – Etat moyen UV. bassin 50cm×50cm, forçage 100ml/min.

K_c est un terme de continuité de la pression. Il est indépendant de x, y et on ne code la pression que pour calculer son gradient. On ne le prendra donc pas en compte. On obtient donc le systèmes d'équations suivant :

$$\partial_t \mathbf{u}_k + \xi_k \mathbf{k} \times \mathbf{u}_k = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_k + \frac{\tau_k}{gh_k} + \nu \Delta \mathbf{u}_k \quad (33)$$

$$\partial_t h_k + \text{div}(h_k \mathbf{u}_k) = \mathcal{W}_{\mathcal{F}_k} + \nu \Delta h_k \quad (34)$$

- $\rho_0 = 1023 kg.m^{-3}$
- z_b Topographie
- τ_k Forçage en vent dans la couche k
- $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_k}$ Forçage en masse dans la couche k
- h_{mean_i} épaisseur initiale de la couche i

Le nombre de couches n_z , leur densités et épaisseurs initiales sont donc maintenant des paramètres d'entrées du modèle. Ce modèle semble bien fonctionner pour des forçages relativement faibles, mais passé une certaine valeur, des couches sont ammenées à disparaître. Ce phénomène, appelé outcropping, amène des difficultés numériques. Ce problème sera traité dans 5.

4.2 Programmation

Dans cette partie nous nous intéressons à la manière dont ont été programmées les équations Shallow Water avec n_z couches.

Il a semblé intéressant de coder le champ de pression réduite :

$$Pr(x, y, z) = \frac{1}{\rho_0} P(x, y, z) \quad (35)$$

où P est la pression définie comme dans (32). Pour cela on construit une matrice GP

$$GP = \frac{g}{\rho_0} \begin{pmatrix} \rho_1 & \cdots & \cdots & \rho_1 \\ \vdots & \rho_2 & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n_z} \end{pmatrix}$$

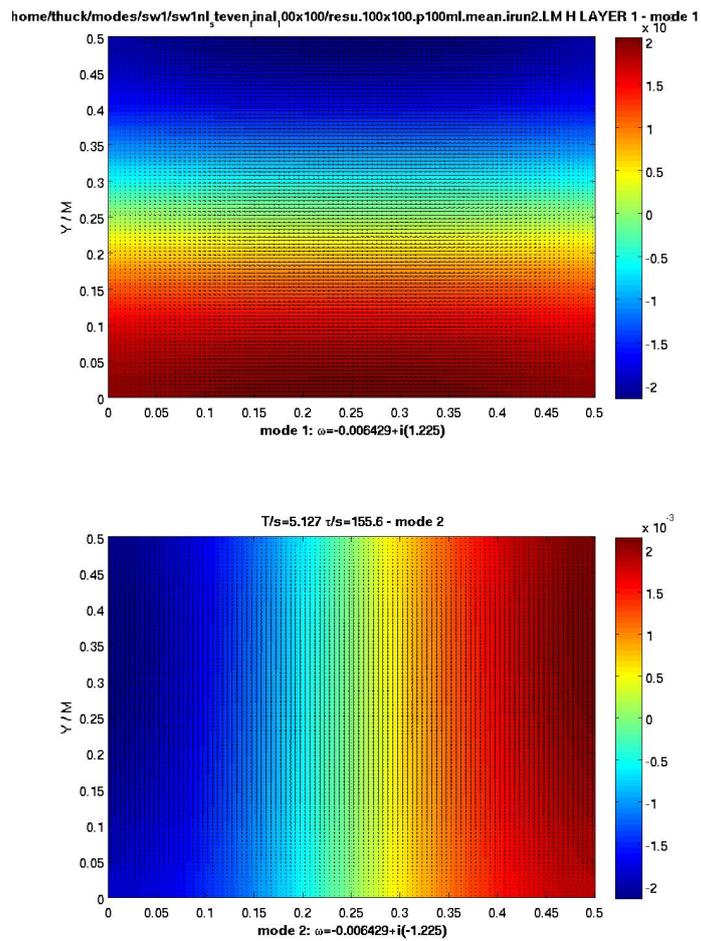


FIGURE 14 – Mode instable rapide, calculé avec l'option 'LM' d'ARPACK. bassin 50cm×50cm, forçage 100ml/min.

Puis on code le champ de pression :

$$Pr(i, j, k) = z_b(i, j)GP(n_z, k) + \sum_{l=1}^{n_z} GP(k, l)h(i, j, l) \quad (36)$$

Il ne reste plus qu'à remplacer la contribution du gradient de pression avec ce nouveau champ et les opérateurs de dérivations de Sadourny, rappelés en (10a),(10b).

4.3 Résultats

La plupart de mes expériences ont été réalisées avec un modèle à 3 couches. On prend en général

- $h_1mean = 800m, \rho_1 = 1023kg.m^{-3}$
- $h_2mean = 1200m, \rho_2 = 1025kg.m^{-3}$
- $h_3mean = 2000m, \rho_3 = 1027kg.m^{-3}$
- $tau_x(i, j, 1) = windforcing * cos(pi * j - 0.5)/ny)/rho0, wind - forcing \in [0.1, 1]$
- sur un bassin océanique de longitude $\in [-60, 0]$, latitude $\in [10, 70]$
- $n_z=3, n_x = 40, n_y = 30$

Déjà on peut observer des différences entre les modèles 1 couche et 3 couches, Figures[15]-[16]

5 Outcropping

Lorsque le forçage devient trop important, il arrive qu'une couche devienne d'épaisseur nulle. Ceci amène deux problèmes numériques importants :

1. Forçage en vent \Rightarrow blow up
2. Forçage en masse \Rightarrow épaisseur négative!

Ces problèmes sont logiques au vu de la manière dont sont codés ces forçages. En effet les forçages étaient effectifs pour la première couche, qui dans certains cas venait à disparaître. Une idée qui nous a paru naturelle est de distribuer ce forçage sur les autres couches, dès que l'épaisseur de la première couche atteint un seuil critique.

5.1 Distribution des forçages

5.1.1 Distribution du forçage en vent

Le forçage en vent n'était présent que dans la première couche, si on ne considère que cette contribution dans les équations shallow water on obtient

$$\partial_t \mathbf{u}_1 = \frac{\tau}{h_1} \quad (37)$$

ceci implique que si $\tau \neq 0$ et que $h_1 \rightarrow 0$, alors $|\mathbf{u}_1| \rightarrow \infty$. C'est ce qui arrive dans figure[17]

Pour éviter ce problème on se donne une hauteur de vent noté h_v qui correspond à la profondeur maximale pour laquelle le vent a un impact. Puis on considère que la forçage se distribue linéairement dans cette zone, vers chaque couche. On pose donc $Wd(i, j, k)$ des coefficients tels qu'on ait conservation de l'énergie :

$$\sum_{l=1}^{n_z} Wd(i, j, k) = 1, \quad \forall i, j \quad (38)$$

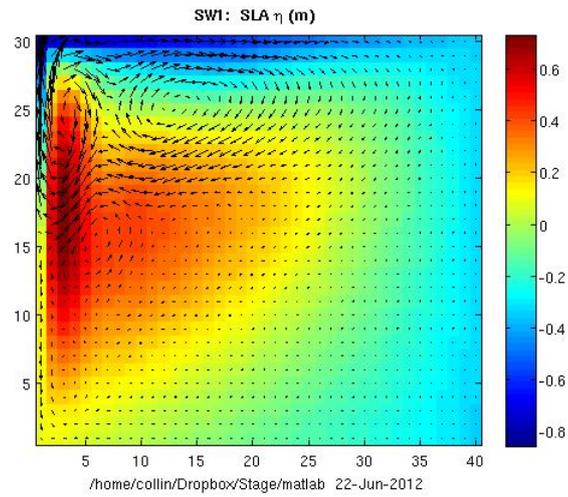


FIGURE 15 – Elévation et vitesses à la surface océanique, modèle 3 couches.

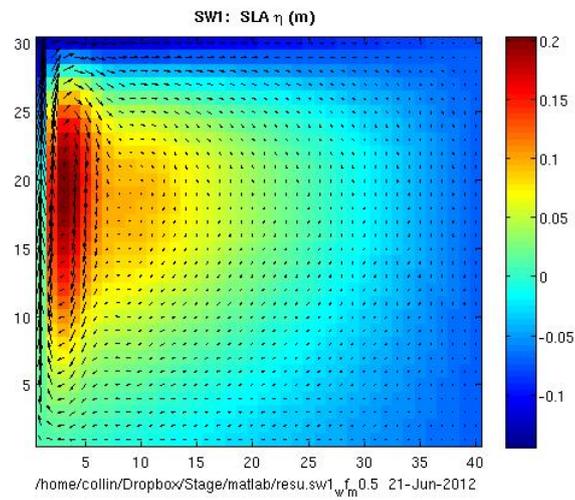


FIGURE 16 – Elévation et vitesses à la surface océanique, modèle 1 couche.

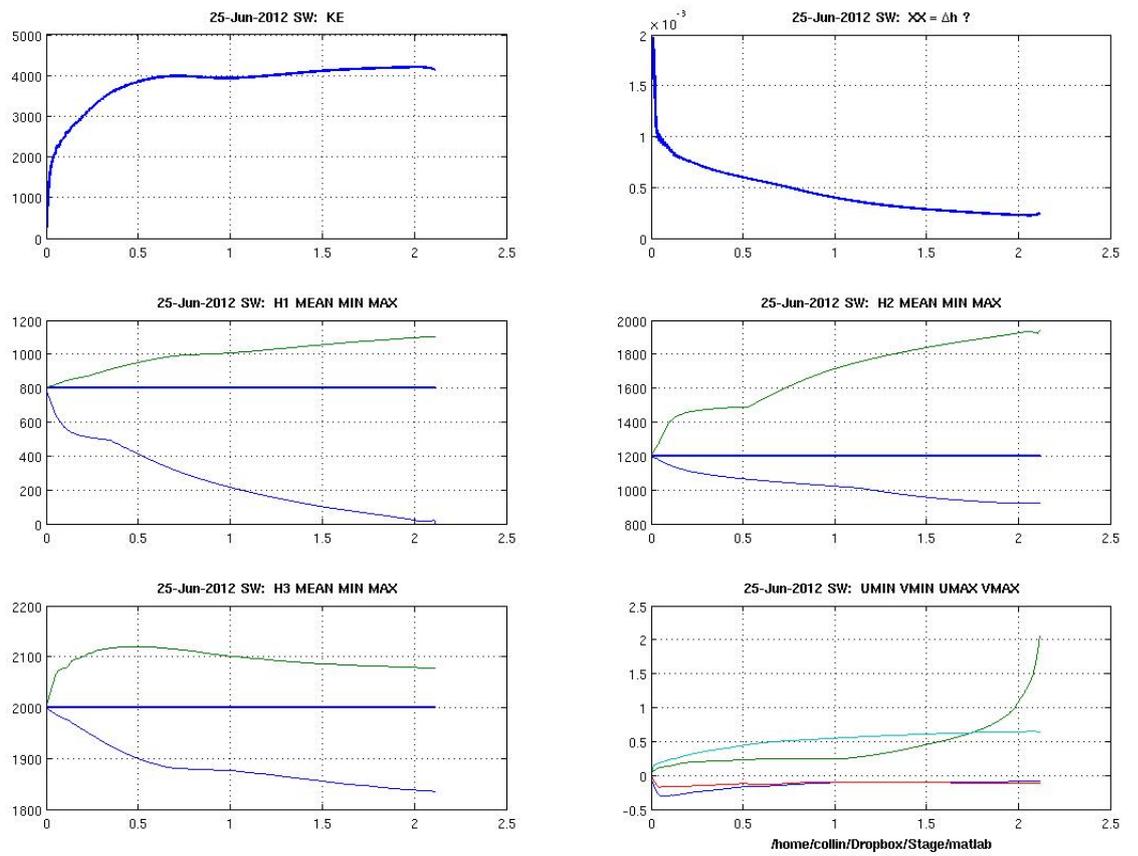


FIGURE 17 – Outcropping de h_1 (mg) et blow-up de v_1 (bd)

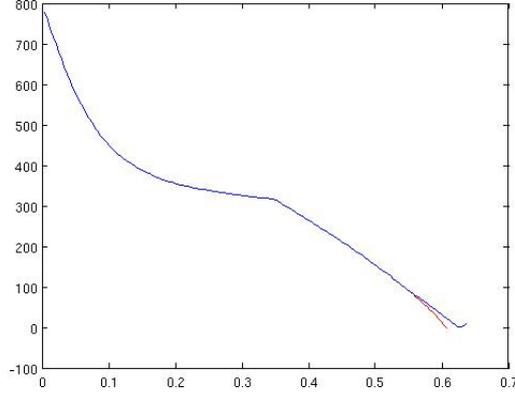


FIGURE 18 – Outcropping de h_1 , forçage normal en bleu, distribué en rouge. Bassin océanique, 3 couches, wind-forcing=-1.0.

Puis on modifie le forçage en vent :

$$\partial_t \mathbf{u}_k = \tau.Wd_k \quad (39)$$

$$\text{while}(\sum_{l=1}^k h_l \leq hw) \quad Wd_k = \frac{h_k}{h_v} \quad (40)$$

$$Wd_{k+1} = 1 - \sum_{l=1}^k Wd_l \quad (41)$$

Cette méthode devrait permettre de ralentir la disparition de la première couche, et limiter l'éclatement des vitesses. En effet avec un tel forçage, quand $h_1 \leq h_v$

$$\partial_t \mathbf{u}_1 = \frac{\tau.Wd_1}{h_1} = \frac{\tau}{h_v} = cte \quad (42)$$

Nos expériences montrent qu'avec un tel forçage l'outcropping est ralenti de quelques pas de temps Figure[18]. Cependant cette distribution en semble pas être suffisante, le forçage n'étant jamais nul, il ya a tout de même outcropping. On va donc changer de stratégie pour distribuer le forçage en masse qui est plus intéressant. En effet l'outcropping avec le forçage en vent n'est effectif que pour des valeurs qui ne sont pas très réalistes : -0.7 alors qu'en réalité on n'excède rarement les -0.1.

5.1.2 Distribution du forçage en masse

Il est nécessaire de distribuer le forçage en masse de manière plus radicale. Supposons que l'épaisseur de la première couche se rapproche de 0. L'idée est de transférer une partie du forçage à la seconde couches dès que $h_1 \leq h_w$, puis la totalité du forçage dès que $h_1 \leq h_c$. Dans ce cas simplifié où seul la première couche peut disparaître on définit des coefficients de distribution Wm_i . Wm_i correspond à la distribution de forçage entre les couches $i - 1$ et i .

NB : on considère qu'il y a une couche 0, pour prendre en compte la pluie ou l'évaporation.

$$Md_1 = 1 \quad (43)$$

$$Md_2 = \frac{1 + \tanh\left(h_1 - \frac{h_c + h_w}{2}\right).Cmd}{2} \quad (44)$$

$$Md_3 = 1 - Md_1 \quad (45)$$

$$\text{Conservation de la masse} \Rightarrow \sum Md = 1 \Rightarrow Md_k = 0, \quad k = 3, \dots, n_z \quad (46)$$

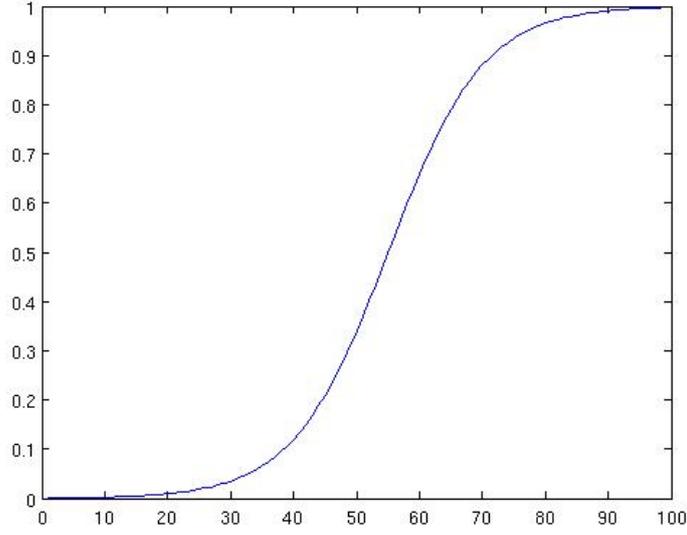


FIGURE 19 – Md_2 en fonction de h_1 , $h_c = 10m$, $h_w = 100m$

- Md_1 est donc à part (pluie, évaporation)
- $Cmd = \frac{6}{h_w - h_c}$
on rappelle que le forçage initial est $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$. On va donc distribuer le forçage dans chaque couche comme suit

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}_1} = Md_2 \cdot \mathcal{W}_{\mathcal{F}} - Md_1 \cdot \mathcal{P}\mathcal{E}_{\mathcal{F}} \quad (47)$$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}_k} = (Md_k + 1 - Md_k) \mathcal{W}_{\mathcal{F}}, \quad k = 2, \dots, n_z \quad (48)$$

$$\partial_t h_k = \mathcal{W}_{\mathcal{F}_k} \quad (49)$$

- $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_k}$: Forçage dans la couche k
- $\mathcal{P}\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$: Forçage de pluie évaporation

Pour le moment le modèle ne permet pas de traiter la distribution du forçage $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$. Ceci ne sera abordé que dans un second temps.

Pour illustrer cette distribution on peut tracer $Md_2 = f(h_1)$, ce qui correspond à la distribution du forçage pour la couche 1 Figure[19].

Pour avoir une idée du comportement de ce modèle modifié, on peut prendre un cas très simplifié des équations Shallow Water, en ne considérant qu'une colonne de 3 couches et seules les contributions du forçage en masse (49) Figure[20].

5.2 Schéma Upstream

La distribution du forçage est une condition nécessaire mais pas suffisante pour gérer l'outcropping. En présence d'un front entre 2 couches le schéma centré, d'advection horizontale peut amener la disparition d'une couche.

$$\partial_t h = -div(h\mathbf{u}) \quad (50)$$

$$h\mathbf{u} = \bar{h}^x u + \bar{h}^y v \quad (51)$$

On peut donc utiliser le schéma upstream d'ordre 1, ici on se place dans le cas 1-D :

$$hu = h_i u_i \quad si \quad u - i \geq 0 \quad (52)$$

$$= h_{i+1} u_i \quad si \quad u_i < 0 \quad (53)$$

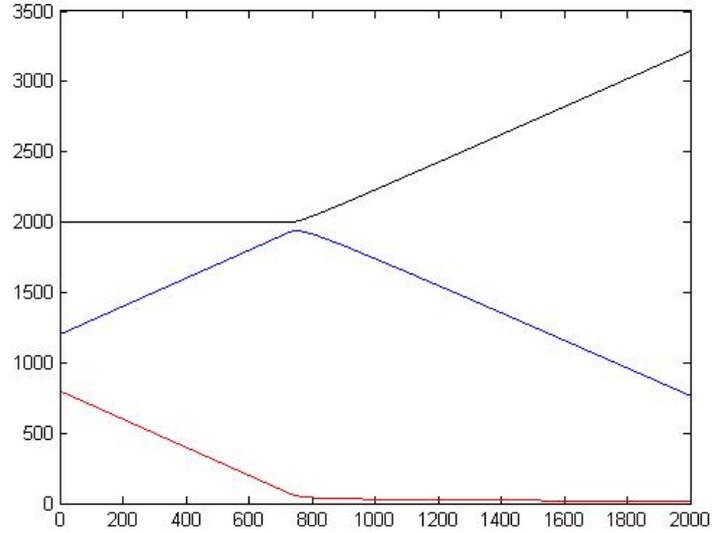


FIGURE 20 – Evolution temporelle des équations SW simplifiées (49). $h_{mean_1} = 800m$, $h_{mean_2} = 1200m$, $h_{mean_3} = 2000m$

Ce type de schéma comporte un inconvénient majeur, il est trop diffusif pour obtenir une variabilité décennale de l'énergie cinétique. Pour limiter la diffusivité du schéma d'advection nous avons eu deux idées :

- : utiliser un schéma TVD
- : utiliser un schéma FCT

5.3 Schéma TVD

On a voulu utiliser un schéma TVD uniquement sur h ce qui était clairement une mauvaise idée.

- : $div(u) \neq 0$
- : les variables de temps et d'espaces ne sont plus séparables
- : Cela fait intervenir un schéma Leapfrog pour u,v et euler pour h

Pour ces différentes raisons nous n'avons pas été plus loin. Une méthode pour utiliser un schéma TVD quand $div(u) \neq 0$ est d'utiliser un schéma comme celui développé par Francois Bouchut.

5.4 Schéma FCT

Les schémas Flux-Corrected-Transport utilisent un schéma centré d'ordre 2 tant qu'il n'y a pas de risque d'outcropping (présence de fronts) et un schéma Upstream d'ordre 1 lorsque c'est nécessaire.

Avantages : cela permet de gérer l'outcropping tout en restant très peu diffusif.

On définit d'abord les quantités h obtenues avec les schémas centré et upstream [21]. Puis on les pondère avec un coefficient.

$$h_{cen}^{n+1} = h^n - \Delta t div(hu)_{cen} \quad (54)$$

$$h_{up}^{n+1} = h^n - \Delta t div(hu)_{up} \quad (55)$$

$$h^{n+1} = h_{up}^{n+1} + C.(h_{cen}^{n+1} - h_{up}^{n+1}), \quad 0 \leq C \leq 1 \quad (56)$$

Soit une case de la grille C donnée. Le coefficient C est calculé à partir de $hmin$, $hmax$, qui correspondent aux valeurs minimales et maximales de h_{up}^{n+1} sur les “5 cases adjacentes”. Puis les flux sont pondérés de telle sorte que $hmin \leq h^{n+1} \leq hmax$. cf. Baraille P.24-31 Le schéma FCT utilisé dans Baraille nous donne donc

$$h^{n+1} = h^n - \Delta t \cdot div(h^n u)_{fct} \quad (57)$$

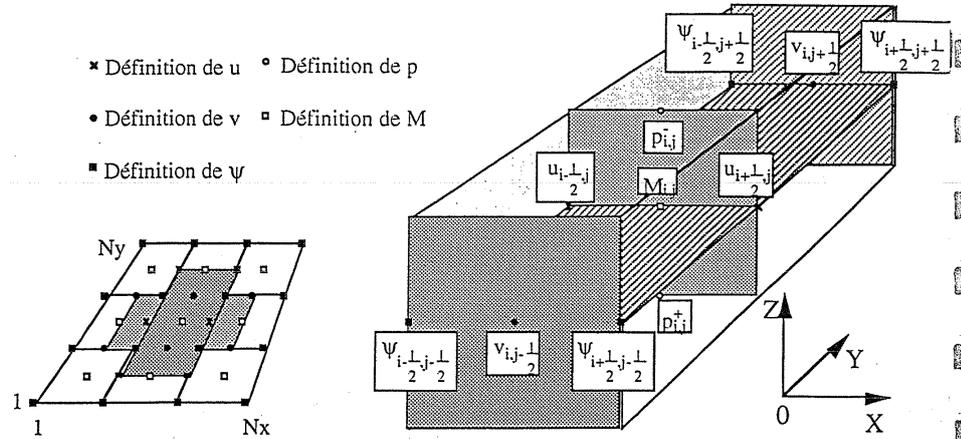
$$\Rightarrow div(h^n u) = \frac{h^n - h^{n+1}}{\Delta t} \quad (58)$$

$$\Rightarrow \partial_t h^n = \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} + Md + \nu \Delta h^n \quad (59)$$

Maintenant que nous avons ce nouveau schéma pour l’advection horizontale, on utilise le schéma temporel Leapfrog corrigé comme précédemment.

Références

- [1] Arakawa Akio and Vivian R. Lamb. A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equations. 1980.
- [2] Benoit Cushman-Roisin. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. 1994.
- [3] Steven Herbette, Antoine Hochet, and Alain colin de verdie. Dynamics of dipolar gyres on the beta-plane. 2009.
- [4] Thierry Huck. Computing linear modes in reduced-gravity shallow water models codes modesswi.m in matlab ; sw.f90 in fortran. 2012.
- [5] S. Lahaye, R. Gouillon, Pineau-Guillou L. Pichon, A., and Y. Morel. A numerical scheme for modelling tidal wetting and drying. 2011.
- [6] Robert Sadourny. The dynamics of finite-difference models of the shallow-water equations. 1974.



• Equation de conservation de la masse

On résout l'équation (41-a) en trois étapes. On utilise un algorithme de flux corrigé originellement construit par Boris et Book 1973 pour les deux premières étapes puis on s'assure lors de la troisième étape de la nullité de la divergence du flux de masse barotrope.

Première étape:

Si l'on suppose que tous les champs sont connus à l'instant $t^n = n\Delta t$, la première étape utilise un schéma aux différences finies (discrétisant l'équation (41-a) qui s'exprime sous la forme (en notant $h = \frac{\partial p}{\partial \rho}$):

$$h_{i,j}^{n+1/2} = h_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+1/2}^n \widetilde{h_{i+1/2,j}^n} - u_{i-1/2}^n \widetilde{h_{i-1/2,j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(v_{i,j+1/2}^n \widetilde{h_{i,j+1/2}^n} - v_{i,j-1/2}^n \widetilde{h_{i,j-1/2}^n} \right) \quad (96)$$

et

$$\widetilde{h_{i+1/2,j}^n} = \begin{cases} h_{i,j}^n & \text{si } u_{i+1/2}^n > 0 \\ h_{i+1,j}^n & \text{si } u_{i+1/2}^n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \widetilde{h_{i,j+1/2}^n} = \begin{cases} h_{i,j}^n & \text{si } v_{i,j+1/2}^n > 0 \\ h_{i,j+1}^n & \text{si } v_{i,j+1/2}^n < 0 \end{cases} \quad (97)$$

Les notations indicielles sont précisées sur la figure précédente.

La première partie du schéma présente les caractéristiques suivantes:

- a) il est d'ordre un (diffusif)
- b) la vitesse du terme de flux est centrée tandis que la hauteur est décentrée
- c) il maintient la positivité des hauteurs de couche pour une condition de Courant un peu restrictive (mais usuelle)

On commente chacun des points b), c).

FIGURE 21 – Schéma Upstream

Si on suppose que $h_{ij}^n > 0$, il suffit donc d'avoir, pour assurer la positivité de h_{ij}^{n+1} :

$$r_x \text{Max} \left| u_{i+\frac{1}{2},j}^n \right| \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad r_y \text{Max} \left| v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right| \leq \frac{1}{4} \quad (106)$$

Le nombre de Courant est donc de 0.25.

Deuxième étape:

La deuxième étape consiste à mettre en place un schéma d'ordre deux chaque fois que la stabilité numérique ne risque pas d'être perturbée. On définit cette deuxième étape pour un indice j constant (il sera omis dans les notations).

Cas général monodimensionnel

On choisit un flux du second ordre $F_{i+\frac{1}{2}}^2$ (on note $F_{i+\frac{1}{2}}^1$ le flux en x d'ordre un défini en (97)) et un opérateur d'antidiffusion $A_{i+\frac{1}{2}}$ par:

$$A_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}}^2 - F_{i+\frac{1}{2}}^1 \quad (107)$$

L'idée consiste à avoir le plus souvent possible le schéma d'ordre deux i.e. de pouvoir obtenir la solution h_i^{n+1} par

$$h_i^{n+1} = h_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i+\frac{1}{2}} - A_{i-\frac{1}{2}}) \quad (108)$$

Pour préserver la stabilité (dans L^∞ et dans BV_{loc} pour le cas scalaire), on substitue à la quantité $A_{i+\frac{1}{2}}$ le flux corrigé $A_{i+\frac{1}{2}}^C$ dans l'égalité (108) pour obtenir:

$$h_i^{n+1} = h_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i+\frac{1}{2}}^C - A_{i-\frac{1}{2}}^C) \quad (109)$$

avec

$$A_{i+\frac{1}{2}}^C = C_{i+\frac{1}{2}} A_{i+\frac{1}{2}} \quad , \quad 0 \leq C_{i+\frac{1}{2}} \leq 1 \quad (110)$$

Le principe de cette correction consiste à diminuer $|A_{i+\frac{1}{2}}^C|$ en modulant la valeur de $C_{i+\frac{1}{2}}$ chaque fois que la stabilité risque d'être perturbée. Cette diminution correspond en fait à un accroissement de la viscosité du schéma. L'intérêt de la méthode provient du choix de $C_{i+\frac{1}{2}}$ qui est une quantité comprise entre 0 et 1 (0 restitue le flux d'ordre un, 1 donne le flux d'ordre deux et la solution doit s'exprimer comme une combinaison barycentrique entre les flux d'ordres un et deux). Pour choisir $C_{i+\frac{1}{2}}$, on commence par définir trois quantités:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^+ = \text{Max}(0, A_{i+\frac{1}{2}}) - \text{Min}(0, A_{i-\frac{1}{2}}) \\ Q_i^+ = h_i^{\text{max}} - h_i^{\frac{n+1}{2}} \\ R_i^+ = \begin{cases} \text{Min}\left(1, \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{Q_i^+}{P_i^+}\right) & \text{si } P_i^+ > 0 \\ 0 & \text{si } P_i^+ = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (111)$$

R_i^+ représente le plus grand facteur multiplicatif possible des termes d'antidiffusion pour que l'on ait toujours

$$h_i^{n+1} \leq h_i^{\text{max}} \quad (112)$$

(h_i^{max} est une borne supérieure à définir). La situation idéale est $R_i^+ = 1$ et il faut toujours avoir $R_i^+ \leq 1$ pour satisfaire à (110). En effet, si l'on a:

$$R_i^+ \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{Q_i^+}{P_i^+}$$

par définition de P_i^+ et de Q_i^+ (quantités positives dès lors que h_i^{max} est bien choisi), on a:

$$h_i^{\text{max}} - h_i^{\frac{n+1}{2}} \geq \frac{\Delta t}{\Delta x} R_i^+ (\text{Max}(0, A_{i+\frac{1}{2}}) - \text{Min}(0, A_{i-\frac{1}{2}})) \quad (113)$$

qui restituera la propriété (112) après choix correct de $C_{i+\frac{1}{2}}$ et $C_{i-\frac{1}{2}}$.

De même, on définit

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^- = \text{Max}(0, A_{i-\frac{1}{2}}) - \text{Min}(0, A_{i+\frac{1}{2}}) \\ Q_i^- = h_i^{\frac{n+1}{2}} - h_i^{\text{min}} \\ R_i^- = \begin{cases} \text{Min}\left(1, \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{Q_i^-}{P_i^-}\right) & \text{si } P_i^- > 0 \\ 0 & \text{si } P_i^- = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (114)$$

R_i^- représente le plus grand facteur multiplicatif possible des termes d'antidiffusion pour que l'on ait toujours

$$h_i^{n+1} \geq h_i^{\text{min}} \quad (115)$$

(h_i^{min} est une borne inférieure à définir). La situation idéale est $R_i^- = 1$ et il faut toujours avoir $R_i^- \leq 1$ pour satisfaire à (115). En effet, si l'on a:

$$R_i^- \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{Q_i^-}{P_i^-}$$

par définition de P_i^- et de Q_i^- (quantités positives dès lors que h_i^{min} est bien choisi), on a:

$$h_i^{n+1/2} - h_i^{\min} \geq \frac{\Delta t}{\Delta x} R_i^+ \left(\text{Max}(0, A_{i+1/2}) - \text{Min}(0, A_{i-1/2}) \right) \quad (116)$$

qui restituera la propriété la propriété (115) après choix correct de $C_{i-1/2}$ et $C_{i+1/2}$.

On peut désormais choisir $C_{i+1/2}$. Si $A_{i+1/2}$ est positif (resp. négatif), la contribution de cette correction de flux a tendance à faire décroître (resp. croître) h_i^{n+1} . On doit donc avoir:

$$C_{i+1/2} \leq R_i^+ \quad \left(\text{resp. } C_{i+1/2} \leq R_i^+ \right) \quad (117)$$

De même, si $A_{i-1/2}$ est positif (resp. négatif), la contribution de cette correction de flux a tendance à faire croître (resp. décroître) h_i^{n+1} . On doit donc avoir:

$$C_{i-1/2} \leq R_i^- \quad \left(\text{resp. } C_{i-1/2} \leq R_i^- \right) \quad (118)$$

Pour satisfaire aux propriétés (117) et (118), on prend:

$$C_{i+1/2} = \begin{cases} \text{Min}(R_{i+1}^+, R_i^-) & \text{si } A_{i+1/2} \geq 0 \\ \text{Min}(R_i^+, R_{i+1}^-) & \text{si } A_{i+1/2} < 0 \end{cases} \quad (119)$$

Il reste à définir les quantités h_i^{\min} et h_i^{\max} .

Un choix possible est :

$$\begin{cases} h_i^{\max} = \text{Max} \left(h_{i-1}^{n+1/2}, h_i^{n+1/2}, h_{i+1}^{n+1/2} \right) \\ h_i^{\min} = \text{Min} \left(h_{i-1}^{n+1/2}, h_i^{n+1/2}, h_{i+1}^{n+1/2} \right) \end{cases} \quad (120)$$

Application à l'équation de conservation de la masse (A1-a):

On choisit tout naturellement comme flux d'ordre deux (compte tenu de la définition des champs sur la grille):

$$F_{i+1/2}^2 = \frac{1}{2} (h_i^n + h_{i+1}^n) u_{i+1/2}^n \quad (121)$$

L'extension au cas bidimensionnel est naturelle:

Cas général bidimensionnel:

On pose:

$$r_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{et} \quad r_y = \frac{\Delta t}{\Delta y} \quad (122)$$

Le schéma d'ordre deux s'écrit

$$h_{ij}^{n+1} = h_{ij}^{\frac{n+1}{2}} - r_x (A_{i+\frac{1}{2},j} - A_{i-\frac{1}{2},j}) - r_y (A_{i,j+\frac{1}{2}} - A_{i,j-\frac{1}{2}}) \quad (123)$$

et le schéma aux flux corrigés devient:

$$h_{ij}^{n+1} = h_{ij}^{\frac{n+1}{2}} - r_x (A_{i+\frac{1}{2},j}^C - A_{i-\frac{1}{2},j}^C) - r_y (A_{i,j+\frac{1}{2}}^C - A_{i,j-\frac{1}{2}}^C) \quad (124)$$

avec

$$\begin{cases} A_{i+\frac{1}{2},j}^C = C_{i+\frac{1}{2},j} A_{i+\frac{1}{2},j} \\ A_{i,j+\frac{1}{2}}^C = C_{i,j+\frac{1}{2}} A_{i,j+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (125)$$

et la propriété

$$\begin{cases} 0 \leq C_{i+\frac{1}{2},j} \leq 1 \\ 0 \leq C_{i,j+\frac{1}{2}} \leq 1 \end{cases} \quad (126)$$

permettant d'obtenir une combinaison barycentrique entre les flux d'ordre un et deux. On définit les termes de correction de flux par:

$$\begin{cases} C_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \text{Min}(R_{i+\frac{1}{2},j}^+, R_{i,j}^-) & \text{si } A_{i+\frac{1}{2},j} \geq 0 \\ \text{Min}(R_{i,j}^+, R_{i+\frac{1}{2},j}^-) & \text{si } A_{i+\frac{1}{2},j} < 0 \end{cases} \\ C_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \text{Min}(R_{i,j+\frac{1}{2}}^+, R_{i,j}^-) & \text{si } A_{i,j+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \text{Min}(R_{i,j}^+, R_{i,j+\frac{1}{2}}^-) & \text{si } A_{i,j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (127)$$

avec

$$\begin{cases} P_{i,j}^+ = \text{Max}(0, A_{i-\frac{1}{2},j}) - \text{Min}(0, A_{i+\frac{1}{2},j}) \\ O_{i,j}^+ = \text{Max}(0, A_{i,j-\frac{1}{2}}) - \text{Min}(0, A_{i,j+\frac{1}{2}}) \\ Q_{i,j}^+ = h_{ij}^{\text{max}} - h_{ij}^{\frac{n+1}{2}} \\ R_{i,j}^+ = \begin{cases} \text{Min}\left(1, \frac{Q_{i,j}^+}{r_x P_{i,j}^+ + r_y O_{i,j}^+}\right) & \text{si } P_{i,j}^+ + O_{i,j}^+ > 0 \\ 0 & \text{si } P_{i,j}^+ + O_{i,j}^+ = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (128)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{ij} = \text{Max}(0, A_{i+\frac{1}{2}, j}) - \text{Min}(0, A_{i-\frac{1}{2}, j}) \\ O_{ij} = \text{Max}(0, A_{i, j+\frac{1}{2}}) - \text{Min}(0, A_{i, j-\frac{1}{2}}) \\ Q_{ij} = h_{ij}^{\frac{n+1}{2}} - h_{ij}^{\min} \\ R_{ij} = \begin{cases} \text{Min}\left(1, \frac{Q_{ij}}{r_x P_{ij} + r_y O_{ij}}\right) & \text{si } P_{ij} + O_{ij} > 0 \\ 0 & \text{si } P_{ij} + O_{ij} = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (129)$$

Ce choix permet de garantir

$$h_{ij}^{n+1} \geq h_{ij}^{\min} \text{ et } h_{ij}^{n+1} \leq h_{ij}^{\max} \quad (130)$$

On démontre la première inégalité (la démonstration est de même nature pour la deuxième)

Par définition de R_{ij} on a:

$$\frac{Q_{ij}}{r_x P_{ij} + r_y O_{ij}} \geq R_{ij} \quad (131)$$

soit:

$$h_{ij}^{\frac{n+1}{2}} - h_{ij}^{\min} \geq R_{ij} (r_x P_{ij} + r_y O_{ij}) \quad (132)$$

c'est-à-dire:

$$h_{ij}^{\frac{n+1}{2}} - h_{ij}^{\min} \geq R_{ij} (r_x (\text{Max}(0, A_{i+\frac{1}{2}, j}) - \text{Min}(0, A_{i-\frac{1}{2}, j})) + r_y (\text{Max}(0, A_{i, j+\frac{1}{2}}) - \text{Min}(0, A_{i, j-\frac{1}{2}}))) \quad (133)$$

Par définition de $C_{i+\frac{1}{2}, j}$ et $C_{i, j+\frac{1}{2}}$ on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{ij} \geq C_{i+\frac{1}{2}, j} \text{ si } A_{i+\frac{1}{2}, j} \geq 0 \\ R_{ij} \geq C_{i-\frac{1}{2}, j} \text{ si } A_{i-\frac{1}{2}, j} \leq 0 \\ R_{ij} \geq C_{i, j+\frac{1}{2}} \text{ si } A_{i, j+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ R_{ij} \geq C_{i, j-\frac{1}{2}} \text{ si } A_{i, j-\frac{1}{2}} \leq 0 \end{array} \right. \quad (134)$$

On a donc toujours:

$$h_{ij}^{\frac{n+1}{2}} - h_{ij}^{\min} \geq r_x (C_{i+\frac{1}{2}, j} \text{Max}(0, A_{i+\frac{1}{2}, j}) - C_{i-\frac{1}{2}, j} \text{Min}(0, A_{i-\frac{1}{2}, j})) + r_y (C_{i, j+\frac{1}{2}} \text{Max}(0, A_{i, j+\frac{1}{2}}) - C_{i, j-\frac{1}{2}} \text{Min}(0, A_{i, j-\frac{1}{2}})) \quad (135)$$

On en déduit:

$$h_{ij}^{\frac{n+1}{2}} - h_{ij}^{\min} \geq r_x (C_{i+\frac{1}{2}, j} A_{i+\frac{1}{2}, j} - C_{i-\frac{1}{2}, j} A_{i-\frac{1}{2}, j}) + r_y (C_{i, j+\frac{1}{2}} A_{i, j+\frac{1}{2}} - C_{i, j-\frac{1}{2}} A_{i, j-\frac{1}{2}}) = h_{ij}^{\frac{n+1}{2}} - h_{ij}^{n+1} \quad (136)$$

D'où la première inégalité de (130).