

# Circulation thermohaline et équations planétaires géostrophiques : propriétés physiques, numériques et mathématiques

Didier Bresch  
Thierry Huck  
Mamadou Sy

## Résumé

La circulation océanique thermohaline, mise en mouvement par les échanges de chaleur et d'eau douce entre l'océan et l'atmosphère, génère des vitesses suffisamment lentes (cm/s) pour justifier une dynamique simplifiée, diagnostique, appelée planétaire géostrophique. Sa mise en oeuvre dans un bassin océanique réaliste comportant des frontières latérales nécessite une paramétrisation de la dissipation induite par la turbulence d'échelles sous-mailles et des conditions aux limites latérales, et réintroduit inévitablement des couches limites de petites échelles, dont l'influence sur la solution finale est d'ordre 1 ! Néanmoins ces équations permettent un certain nombre d'applications théoriques, conceptuelles, et numériques idéalisées, qui sont beaucoup plus difficiles à mettre en oeuvre avec les équations traditionnelles dites primitives, comme l'analyse de stabilité linéaire de la circulation générale. Les études mathématiques, plus récentes, sont principalement dédiées aux problèmes d'existence globale de solutions faibles ou fortes, ou à l'existence de bornes sur la dimension d'attracteur. Notons que les équations planétaires géostrophiques correspondent à des équations de convection en milieux poreux minces. Nous donnons un résultat mathématique de convergence entre le modèle de Salmon 3D et le modèle planétaire géostrophique classique. Nous indiquons également certains problèmes ouverts qui intéressent particulièrement les océanographes.

## 1 La circulation océanique thermohaline

### Introduction

Les variations d'insolation avec la latitude, mais aussi les échanges de chaleur et d'eau douce entre l'océan et l'atmosphère, modifient la température

et la salinité de l'eau à la surface des océans, et créent ainsi des courants de densité. Influencés également par les vents en surface, ces courants tendent à feuilleter l'océan en couches ("masses d'eau") de propriétés quasi-uniformes, rejoignant la surface dans leur région de formation, et soumises au mélange aux interfaces entre les couches. Cette circulation d'échelle planétaire, dite thermohaline, est relativement lente avec des vitesses de l'ordre du mm/s dans l'intérieur de l'océan, mais jusqu'à quelques cm/s dans des courants bien identifiés, plus souvent intensifiés le long des bords ouest, et larges de moins d'une centaine de km. Elle joue un rôle aussi important que l'atmosphère dans le transport de chaleur des régions tropicales vers les régions polaires (plus de 2 petawatt au niveau des tropiques), réduisant ainsi les écarts de température à la surface du globe et rendant notre planète plus vivable. On se demande actuellement comment la formation des eaux profondes en Atlantique Nord, qui draine les eaux du Gulf Stream si favorable au climat européen, réagira au réchauffement climatique et à l'augmentation prévisible des pluies aux moyennes et hautes latitudes.

Contrairement à l'atmosphère où les phénomènes transitoires comme les anticyclones et les dépressions ont des tailles assez voisines de la circulation générale (couramment plus de 1000 km), on peut imaginer que la circulation thermohaline est assez bien découplée des tourbillons océaniques, dits de méso-échelle, de diamètre typique d'une centaine de km. Il est ainsi tentant de dériver des équations du mouvement filtrées pour cette circulation lente de grande échelle : les équations planétaires géostrophiques.

## **La circulation thermohaline "à la main"**

### *Une circulation primaire "adiabatique"*

Les flux de chaleur, variant principalement avec la latitude, induisent un gradient méridien de température, donc de densité, à la surface des océans. La dilatation des eaux de surface tropicales, conjointement à une contraction des eaux de surface des régions froides, génère un gradient de pression sud-nord dans les couches supérieures (et parallèlement un gradient opposé dans les couches profondes). L'équilibre géostrophique, c'est-à-dire entre gradient de pression et force de Coriolis, implique alors un courant vers l'est (ouest) dans les couches de surface (de fond), loin des continents... Outre l'incapacité de ces courants à transporter de la chaleur pour équilibrer l'excédent tropical et le déficit aux hautes latitudes, et leur caractère éventuellement instable, la

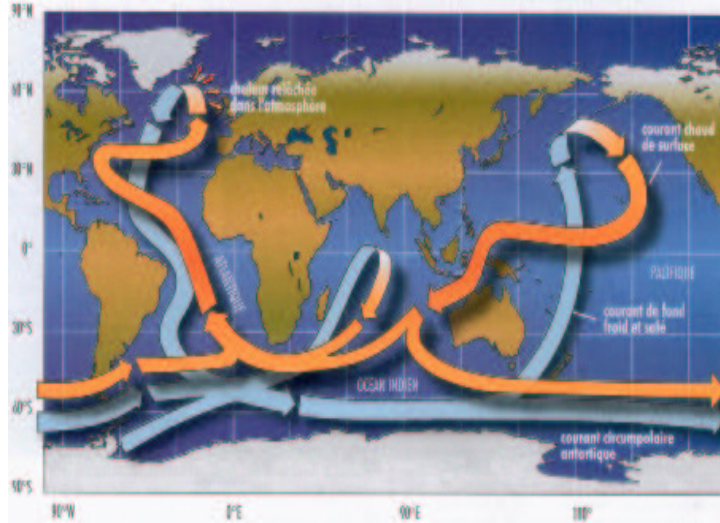


FIG. 1 – *Le célèbre tapis roulant océanique ("conveyor belt"), popularisé par Wally Broecker et adapté par Pascale Delecluse.*

présence des continents, frontières méridiennes des bassins océaniques, modifie nécessairement cette solution intérieure en créant des courants méridiens.

#### *Une circulation secondaire "efficace"*

Une manière d'idéaliser cette situation dans le cadre géostrophique est donc de considérer un océan à deux couches, les eaux froides et denses au fond alimentées par les régions polaires, et les eaux supérieures plus chaudes et plus légères au dessus de la thermocline (zone de variation rapide de la température). Ainsi le courant vers l'est rencontrant le bord est enfoncé l'interface entre ces deux couches, alors que la divergence des eaux supérieures le long du bord ouest la soulève. Les pentes ainsi formées sont associées à des courants géostrophiques vers les pôles (l'équateur) en surface (au fond) le long des bords. Différents arguments dynamiques et thermodynamiques justifient une intensification des courants sur le bord ouest des océans plutôt que sur le bord est : dissipation de vorticité potentielle, asymétrie entre les processus de refroidissement (convection) et réchauffement (diffusion)... Cette vision de la circulation thermohaline à l'échelle d'un bassin dans un seul hémisphère est évidemment largement idéalisée : il faut vraiment voir cette circulation à l'échelle globale et faisant intervenir tous les bassins océaniques et les grands systèmes de courants (Gulf Stream dans l'Atlantique Nord, Kuroshio dans le

Pacifique Nord, Courant Antarctique Circumpolaire dans l'océan austral) et on ne peut pas la découpler de la circulation forcée par le vent (voir FIG. 1).

### **Quelques remarques complémentaires**

Si la transformation des eaux chaudes en eaux froides résulte bien du refroidissement intense d'eaux suffisamment salées en surface, la transformation inverse n'est pas encore parfaitement comprise : la théorie classique prônait le rôle du mélange vertical à travers la thermocline, via l'équilibre de Sverdrup entre l'advection verticale de chaleur due à la remontée lente des eaux froides et la diffusion diapycnale (à travers les isopycnes, soit souvent quasiment verticale) de chaleur. Depuis, d'autres mécanismes de conversion ont été proposés, par exemple par transformation des eaux froides en eau chaude dans la couche d'Ekman à travers les fronts antarctiques.

Plus l'extension des zones de formation d'eau profonde par convection est limitée, plus les eaux ainsi produites sont froides, ce qui maximise l'énergie potentielle de la stratification moyenne de l'océan (structure verticale en température). Effectivement, les eaux profondes sont formées par convection hivernale dans des régions bien connues : mer de Norvège, du Groenland et du Labrador pour l'hémisphère nord, mer de Weddell et de Ross dans l'Antarctique.

La théorie des couches profondes de Stommel-Arons (1960), voir [42, 43], a anticipé l'observation des courants profonds de bord ouest formés par l'eau profonde Nord-Atlantique. Elle est basée sur les hypothèses que les couches profondes sont formées dans les régions froides (source de masse) et consommées par mélange vertical partout ailleurs, ce qui est associé à des vitesses verticales vers le haut à travers l'interface supérieure. Conséquence de la conservation de la vorticité potentielle, les courants intérieurs associés sont à l'opposé du transport attendu, en fait de l'équateur vers les pôles, et le courant de bord ouest doit faire le double du travail pour compenser l'apport de masse aux hautes latitudes...

## **2 Dérivation des équations planétaires géostrophiques**

### **Équations planétaires géostrophiques**

Les équations primitives, parfaitement adaptées à l'étude de la circulation océanique, dérivent des équations de Navier-Stokes lorsqu'on fait les approximations de Boussinesq (1903), voir [2], où les variations de densité ne sont

prises en compte qu'associées à la force gravitationnelle, et hydrostatique :

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v + w \partial_z v + f v^\perp = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P \\ \partial_z P = -\rho g \\ \nabla \cdot v + \partial_z w = 0 \\ \partial_t \rho + (v \cdot \nabla)\rho + w \partial_z \rho = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $v = (v_1, v_2)$  et  $v^\perp = (-v_2, v_1)$ . Pour la circulation thermohaline, dont les échelles spatiales sont bien supérieures au rayon de déformation interne, et les échelles temporelles plus longues que quelques jours, on peut encore simplifier ces équations.

Historiquement, Burger [4] dérive le premier en 1958 des équations de la dynamique de l'atmosphère spécialement adaptées aux échelles planétaires :

$$\text{Ro} = \frac{V}{fL} \ll \frac{L}{a} \leq 1, \quad \frac{V^2}{gH} \ll 1, \quad \frac{fV}{g} \leq \frac{H}{a} \ll 1,$$

où  $V$  est l'ordre de grandeur des vitesses horizontales,  $L$  et  $H$  respectivement les échelles horizontales et verticales des mouvements,  $a$  le rayon de la Terre,  $g$  l'accélération de la gravité au niveau de la mer,  $f=2\Omega\sin(\text{latitude})$  le paramètre de Coriolis, et  $\text{Ro}$  le nombre de Rossby.

Parallèlement, Robinson et Stommel [33] et Welander [46] dérivent simultanément en 1959 les équations de la thermocline pour l'océan, afin d'essayer d'en expliquer la structure thermique (stratification), basées sur les hypothèses suivantes :

$$\frac{H}{L} \ll 1, \quad \text{Ro} = \frac{V}{fL} \ll 1, \quad \frac{fV}{\frac{g \Delta \rho}{\rho_0}} \ll 1.$$

Sur la sphère, la faible épaisseur de l'océan comparée au rayon de la Terre permet de simplifier encore ces équations des termes métriques dans l'équation de continuité et de remplacer la valeur de la coordonnée radiale par  $a$  partout où elle n'apparaît pas comme une variation.

Les équations du mouvement se ramènent ainsi à l'équilibre géostrophique pour les vitesses horizontales, à l'équation hydrostatique sur la verticale, et à la divergence nulle des vitesses (équation de continuité), voir (3.3) avec  $\mathbf{D}_H = D_V = 0$ . L'équation de vorticité qui en découle, dite de Sverdrup, est également quasi-stationnaire :

$$\beta v_2 = f \partial_z w. \quad (2.2)$$

Ces équations inviscides sont ainsi utilisées pour étudier la structure interne de l'océan mais ne permettent pas de résoudre les couches limites de bord. La relation de Sverdrup est obtenue en prenant le rotationnel de l'équation (3.3)<sub>1</sub> où  $\mathbf{D}_H = 0$ .

Cette équation permet par exemple de donner explicitement  $v_2$  et  $w$  en fonction de  $\rho$ . En effet l'équation satisfaite par  $v_2$  dérivée par rapport à  $z$  donne

$$\partial_z^2 w = -\frac{\beta}{\rho_0 f^2} \partial_x(\rho g).$$

Les conditions aux bords sur  $w$  permettent alors d'intégrer directement suivant la verticale. La composante de  $v$  suivant l'axe sud-nord est alors donnée par (2.2). Notons que  $\bar{v}_2 = 0$ . Il reste maintenant à déterminer  $v_1$ . On sait que  $\nabla \cdot \bar{v} = 0$  sur la surface par intégration verticale de la contrainte d'incompressibilité. Supposons qu'il soit possible de trouver une solution  $v$  telle que  $v \cdot n = 0$  alors cette solution satisfait également  $\bar{v} \cdot n = 0$  sur le rivage. Ce qui donne  $\bar{v}_1 n_x = 0$  sur  $\partial S$ . Avec  $\partial_x \bar{v}_1 = 0$  sur  $S$  et donc  $\bar{v}_1 = 0$ . Or  $\partial_z v_1 = \partial_y T$  en dérivant (3.3)<sub>2</sub> par rapport à  $z$ . On voit donc que  $v_1$  est déterminé de manière unique. On vérifie, dans le cas général, que  $v \cdot n \neq 0$ . Pour que  $v \cdot n = 0$ , il faudrait avoir  $T$  constant sur le bord latéral, ce qui n'est pas *a priori* le cas.

Phillips [31] synthétise en 1963 les résultats atmosphériques et océaniques sous la dénomination de mouvements géostrophiques de type 2, où l'échelle spatiale horizontale est comparable au rayon de la Terre et le nombre de Burger petit :

$$\frac{L}{a} \sim 1, \quad \text{Bu} = \frac{g H \Delta \rho}{f^2 L^2 \rho_0} \ll 1,$$

ce qui est équivalent à supposer l'échelle horizontale des mouvements grande devant le premier rayon de déformation interne, de l'ordre d'une centaine de km dans l'océan.

La spécificité de cette dynamique réside dans le caractère *diagnostique* des équations de quantité de mouvement (et de vorticité), alors que les équations pour les traceurs actifs température et salinité (et l'équation d'état) restent inchangées, avec les mêmes paramétrisations des processus de petites échelles qu'avec les équations primitives : ce sont ces dernières qui comportent l'évolution temporelle des champs (prognostiques).

Ces équations filtrent ainsi les ondes de gravité et de Rossby rapides (barotropes), et l'océan s'ajuste désormais par les ondes de Rossby baroclines, lentes (de célérité vers l'ouest comparable aux courants horizontaux, soit de

l'ordre du cm/s), et des ondes visqueuses de bord, rapides (période  $\sim$  mois), analogues des ondes de Kelvin en l'absence des termes non-linéaires dans les équations de la quantité de mouvement (leur vitesse dépend d'ailleurs de la résolution horizontale).

### Conditions limites et processus sous-mailles $\Rightarrow$ dissipation

Néanmoins, pour satisfaire les conditions aux limites, il est nécessaire de prendre en compte la dissipation dans les équations du mouvement, et les petites échelles réapparaissent dans les couches limites frictionnelles...

En outre, ces équations ne représentant que les processus de grande échelle, alors que la plus grande partie de l'énergie cinétique de l'océan se trouve à la méso-échelle et réalise une grande partie du mélange des propriétés : il est nécessaire de paramétriser ces processus sous-mailles. Une approche traditionnelle de type diffusion moléculaire est souvent employée, principalement pour les traceurs, mais des approches plus précises ont commencé à voir le jour depuis une dizaine d'années : mélange le long des isopycnes – les surfaces d'égalité de densité – (Redi 1982, [32]) et diffusion de leur épaisseur (Gent et McWilliams 1990, [16])... voir Griffies et al. (2000, [17]) pour les derniers raffinements des modèles de circulation générale océanique. Il faut mentionner la paramétrisation classique de la convection océanique, qui s'effectue dans des cheminées convectives de moins d'un km de diamètre, et qui est très souvent représentée par un mélange pur et simple des propriétés sur la verticale jusqu'à obtention d'un profil indemne d'instabilités statiques (une paramétrisation à seuil, donc fortement nonlinéaire!) .

Malgré tout, la dynamique grande-échelle reste très inadéquate pour satisfaire les conditions aux limites latérales, et le développement de paramétrisations pour des couches limites turbulentes serait très utile. En effet, on peut voir dans les expériences numériques que le choix du type de viscosité et de condition aux limites influence l'amplitude de la circulation thermohaline à l'ordre 1 (section suivante) ! L'influence de la paramétrisation est également fort visible du point de vue qualitatif mathématiquement.

### Utilisation pratique

Pratiquement, on décompose souvent les champs de vitesse en partie barotrope (moyenne verticale) et partie barocline (différence à la moyenne, donc d'intégrale verticale nulle). Partant de champs de température et salinité initiaux, on calcule le champ de pression hydrostatique barocline par intégration verticale de la densité. On calcule alors les vitesses horizontales baroclines

(diagnostiques), dont on déduit par intégration verticale de la divergence horizontale les vitesses verticales. Il suffit alors d'intégrer dans le temps les équations prognostiques pour la température et la salinité.

Si l'on se base sur les coefficients turbulents de diffusion horizontale de quantité de mouvement (typiquement  $1000 \text{ m}^2/\text{s}$ ), la largeur théorique des couches limites de bord est d'à peine une centaine de km dans la réalité, ces couches sont turbulentes et il n'est pas évident que leur analogue frictionnel soit satisfaisant. En fait, afin de ne pas avoir à raffiner la résolution horizontale du modèle pour résoudre ces couches, on utilise couramment des coefficients de viscosité horizontale de  $10^5 \text{ m}^2/\text{s}$ ...

Plusieurs utilisations numériques de ces équations ont été faites dans la littérature océanographique: Salmon ([34, 35]), Killworth ([24]), Colin de Verdière ([7, 8, 9]), Zhang et al. ([49]), Huck ([20]) et Huck et al. ([23]) avec différents choix pour la dissipation et les conditions aux limites, dont les conséquences sont discutées dans la section suivante.

### 3 Importance de la paramétrisation de la viscosité et des couches limites latérales

#### Différents choix de dissipation et de couches limites latérales

On cherche donc à résoudre le système d'équations suivant pour les vitesses horizontales  $v = (v_1, v_2)$  et verticale  $w$  (l'opérateur  $\nabla$  est limité aux dérivées horizontales) et la pression  $p$ :

$$\begin{cases} f v^\perp + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \mathbf{D}_H \\ \partial_z p + \rho g = \rho_0 D_V \\ \nabla \cdot v + \partial_z w = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La première équation décrit la dynamique géostrophique. La seconde équation est appelée approximation hydrostatique. La dernière représente l'incompressibilité du fluide. On considère une équation d'état  $\rho(T, S, p)$ , par exemple linéarisée:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha T + \beta S),$$

avec  $\alpha = 2 \times 10^{-4} K^{-1}$  et  $\beta = 8 \times 10^{-4} psu^{-1}$ .



L'équation d'advection-diffusion-convection du traceur  $q$  (T ou S) est donnée par

$$\partial_t q + \nabla \cdot (vq) + \partial_z(wq) = \nabla \cdot (\kappa_H \nabla q) + \partial_z(\kappa_V \partial_z q) + C.$$

Les conditions aux limites latérales sont données par :

$$v \cdot n = 0, \quad \kappa_H \partial_n q = 0$$

et les conditions limites à la surface et au fond :

$$w = 0 \text{ (toit rigide),} \quad \kappa_V \partial_z q = Q/\rho_0 C_P \text{ en surface et} \quad \kappa_V \partial_z q = 0 \text{ au fond}$$

(où  $Q$  est le flux de chaleur en  $W m^{-2}$  et  $C_P$  la capacité calorifique de l'eau de mer). Par simplicité, on se limite ici à un domaine cartésien de la taille de l'Atlantique Nord. Le paramètre de Coriolis  $f$  est linéarisé autour de la latitude moyenne  $40^\circ N$ , soit  $f = f_0 + \beta y$ , avec  $f_0 = 10^{-4} s^{-1}$  et  $\beta = 2 \times 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$ . C'est ce que l'on appelle l'approximation du plan- $\beta$ .

Les diffusivités turbulentes horizontale  $\kappa_H = 700 m^2 s^{-1}$  et verticale  $\kappa_V = 10^{-4} m^2 s^{-1}$  dérivent d'estimations faites à partir d'observations de dispersion de flotteurs et de traceurs dans différentes régions de l'océan. Le terme  $C$  représente l'ajustement convectif, c'est-à-dire le mélange vertical effectué pour éliminer les instabilités statiques, et dont les processus (non-hydrostatiques) dans l'océan impliquent des échelles spatiales (km) et temporelles (minute) non-résolues : une procédure consiste à scrutter tous les profils verticaux de densité à la fin de chaque pas de temps, et s'il y a apparition d'une inversion du gradient de densité, en général suite au refroidissement ou à l'évaporation en surface, les deux boîtes impliquées voient leurs propriétés (température et salinité) immédiatement mélangées ; si ce mélange produit une eau de densité encore supérieure à l'eau sous-jacente, la boîte inférieure est mélangée aux deux précédentes et ainsi de suite jusqu'à obtention d'un profil vertical de densité stable. Dans l'océan, ces processus sont suffisamment rapides pour qu'on puisse les considérer comme instantanés aux échelles de temps PG.

Le forçage est un flux différentiel de traceurs en surface, qui apparait dans la condition de flux en surface (auquel on aurait pu ajouter une tension de vent répartie sur le premier niveau).

Les détails de la résolution numérique suivent :

- *modèle en  $z$* , c'est-à-dire que l'épaisseur des niveaux verticaux est fixée (contrairement aux modèles isopycnaux où la discrétisation verticale se fait

sur la densité) ;

- *différences finies*, avec un pas de grille régulier sur l'horizontale (160 km), mais raffiné en surface sur la verticale (15 niveaux d'épaisseur variable de 50 à 500 m) ;

- *grille B* (Arakawa 1966 [1]), où température, pression et vitesses verticales sont calculées au centre des mailles alors que les vitesses  $v$  sont calculées aux coins ;

- domaine rectangulaire à fond plat, cartésien, de dimensions 5120 km  $\times$  4480 km ( $20^\circ N - 60^\circ N$ )  $\times$  4500 m ;

- pas de temps  $\sim 1$  jour (variant de 0.5 à 7 jours suivant les modèles).

Une intégration de 3000 ans est nécessaire pour atteindre l'équilibre thermodynamique (ce qui prend quelques heures de calcul sur un bon processeur scalaire de type Compaq Alpha).

Les coefficients de viscosité (si besoin) sont déterminés pour que la résolution horizontale permette de résoudre les couches limites latérales : on détermine ainsi le coefficient de friction linéaire  $\epsilon = 4.4 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , le coefficient de diffusion laplacien  $A_H = 1.5 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  ou harmonique  $A_4 = 10^{19} \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$ .

La comparaison avec le modèle aux équations primitives MOM (pour *Modular Ocean Model*, développé au *Geophysical Fluid Dynamics Laboratory* à Princeton, USA – Pacanowski et al. 1991 [29]) pour un domaine, un forçage et des paramétrisations identiques donne des résultats très similaires à PGL (HWC99), confirmant le choix de la dynamique planétaire géostrophique pour étudier la circulation générale océanique.

Ces modèles simples à mettre en œuvre ont été mis à contribution pour étudier l'influence des paramétrisations de la viscosité et des couches limites latérales sur la circulation thermohaline. En effet, vu que la dynamique géostrophique ne permet pas de satisfaire les conditions aux limites latérales, on peut s'attendre à ce que la clôture turbulente conditionne fortement la solution finale. Une analyse dimensionnelle basée sur le nombre d'Ekman horizontal ( $E = \nu / f(\Delta x)^2 \ll 1$ , avec  $\nu \sim \beta(\Delta x)^3$  en laplacien) suggère que la dynamique intérieure, à un pas de grille du bord, ne sent pas la présence du bord : ainsi les vitesses restent quasi-géostrophiques jusqu'au point de grille le plus proche du bord, et l'application de la condition limite latérale génère inévitablement de fortes divergences des vitesses horizontales, donc de fortes vitesses verticales (*cross-isopycnals*, upwelling le long des bords ouest et downwelling le long des bords est pour des courants géostrophiques vers l'est, alors que la conservation de la vortacité potentielle impliquerait

Modèle	$D_H$	$D_V$	C. L. L.	Grille	Références
MOM	$A_H \nabla^2 \mathbf{u} - nl$	0	non-glissement	B	[Pacanowski et al. 1991]
PGLA	$A_H \nabla^2 \mathbf{u}$	0	non-glissement	A	[Colin de Verdière 1988]
PGL	$A_H \nabla^2 \mathbf{u}$	0	non-glissement	B	[HWC99]
PGLslip	$A_H \nabla^2 \mathbf{u}$	0	glissement	B	[HWC99]
PGBslip	$-A_4 \nabla^4 \mathbf{u}$	0	glissement	B	[HWC99]
PG0	0	0	non-glissement	D	[Zhang et al. 1992]
PG0slip	0	0	glissement	B	[HWC99]
PG0W	0	0	imperméabilité	B	[HWC99]
PGRD	$-\epsilon \mathbf{u}$	0	non-glissement	D	[Zhang et al. 1992]
PGR	$-\epsilon \mathbf{u}$	0	non-glissement	B	[HWC99]
PGRslip	$-\epsilon \mathbf{u}$	0	glissement	B	[HWC99]
PGRW	$-\epsilon \mathbf{u}$	0	imperméabilité	B	[Winton 1993, HWC99]
PGR4	$-\epsilon \mathbf{u}$	0	imperméabilité	B	[Samelson et Vallis 1997, HWC99]
PGRS	$-\epsilon \mathbf{u}$	$-\epsilon_V w$	imperméabilité	B	[Salmon 1986]

TAB. 1 – *Caractéristiques et références de plusieurs modèles de circulation océanique, planétaire-géostrophique ou aux équations primitives (MOM, nl représente tous les termes non-linéaires dans l'équation de la quantité de mouvement). Couches limites latérales (C. L. L.): "imperméabilité" est ici utilisé dans le sens où des vitesses tangentielles sont permises le long des bords et calculées de différentes manières par Salmon, Winton ou Samelson et Vallis.*

Friction $D_H$ - C. L. L. :	non-glissement	glissement	imperméabilité
0	PG0	PG0slip	PG0W
linéaire ( $-\epsilon \mathbf{u}$ )	PGR	PGRslip	PGRW, PGR4, PGRS
laplacienne ( $A_H \nabla^2 \mathbf{u}$ )	MOM, PGL	PGLslip	n/a
biharmonique ( $-A_4 \nabla^4 \mathbf{u}$ )	n/a	PGBslip	n/a

TAB. 2 – *Modèles suivant dissipation et conditions aux limites.*

des courants méridiens associés). C'est pourquoi on observe aussi peu de différence entre un modèle prenant explicitement en compte la dissipation de quantité de mouvement (PGL) et un modèle purement géostrophique (PG0). Deux modèles se démarquent notablement de ce comportement, le modèle de Salmon [34] et l'application de la condition aux limites de Winton [47, 48] ou de Samelson et Vallis [39, 38] permettant des vitesses tangentielles le long des bords. Winton calcule ces vitesses via l'équation de vorticité, ce qui permet de réduire les vitesses verticales en les contraignant à être en accord avec l'advection de vorticité planétaire.

Ces différents modèles sont comparés pour deux types de conditions aux limites en surface, d'abord pour un forçage de type relaxation des températures de surface (HWC99), puis pour des flux de chaleur constants.

**Comparaison des modèles avec rappel des températures de surface**

Pour un forçage  $Q = \gamma(T^* - \text{SST})$ , consistant en un rappel des températures de surface (SST pour *Sea Surface Temperature*) vers un profil atmosphérique  $T^*$  linéaire variant de  $25^\circ\text{C}$  à  $20^\circ\text{N}$  à  $2^\circ\text{C}$  à  $60^\circ\text{N}$ , avec  $\gamma = 35 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$  (Haney 1971 [19]), soit un temps caractéristique  $\tau = \gamma/(\rho_0 C_P h)$  de 66 jours pour la couche de surface d'épaisseur  $h=50 \text{ m}$ , les modèles atteignent tous un état d'équilibre, avec une circulation méridienne (en moyenne zonale) de l'ordre de  $10 \text{ Sv}$  ( $1 \text{ Sv}=10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ ). Ces résultats sont présentés et discutés dans HWC99 et résumés ici. Le problème principal pour juger des performances de ces modèles est l'absence de réalité à laquelle se comparer, mais également du type de forçage qui interagit avec la circulation océanique : si les courants changent d'une dynamique à l'autre, la distribution de température en surface également, donc les flux de chaleur, et les modèles ne sont finalement pas forcés de la même manière.

Deux groupes de modèles se différencient aisément : un premier groupe qui donne des résultats très similaires au modèle peut-être le plus utilisé en océanographie, MOM, et qui réunit tous les modèles à friction linéaire, laplacienne, biharmonique ou nulle avec des conditions latérales de glissement ou non-glissement – ces modèles sont caractérisés par des vitesses verticales (diapycnales) très importantes sur les bords,  $O(10^{-5} \text{ m/s})$ , un courant de bord ouest et une cellule méridienne intenses.

Le deuxième groupe associe des modèles relativement marginaux (PGRS, PGRW, PGR4, PG0W), caractérisés par une condition latérale d'imperméabilité permettant des vitesses tangentielles le long des bords, et implémentable uniquement avec une friction linéaire, peu utilisée en océanographie sauf pour des études analytiques. Cette condition latérale, permettant une recirculation horizontale des courants géostrophiques arrivant perpendiculairement à une côte, réduit considérablement les transports verticaux de masse (par un facteur 3 à 10) et réconcilie ainsi les zones de convection et les zones de formation effective d'eau profonde : la circulation thermohaline semble plus efficace, formant des eaux profondes plus froides pour une cellule méridienne et des courants de bord ouest moins intenses.

Finalement, illustrons l'importance des différences entre ces modèles. Thermodynamiquement les différences ne sont pas frappantes : la température moyenne du bassin varie de  $4.5^\circ\text{C}$  (PG0) à  $4^\circ\text{C}$  (PGRS, PGRW), alors que la température moyenne des eaux de fond varie parallèlement de  $3.75^\circ\text{C}$  à  $3.35^\circ\text{C}$ . Dynamiquement, l'influence des conditions aux limites latérales et marginalement, de la paramétrisation de la dissipation, est stupéfiante, avec

des différences de 100% : l'intensité de la cellule méridienne varie de presque 16 Sv (PG0, MOM, PGL) à moins de 8 Sv (PGRS, PG0W, PGR4), avec des variations similaires du transport et de l'Upwelling le long du bord ouest ! Le détail de la circulation de surface laisse apparaître des différences : alors que pour le premier groupe, le jet zonal vers l'est, prolongeant le courant de bord ouest, se dissipe en grande partie verticalement en arrivant sur le bord est, le deuxième groupe voit se former un tourbillon cyclonique dans le coin nord-est, ce qui modifie profondément les zones de convection.

Une comparaison récente entre un modèle en  $z$  (MOM) et un modèle en couches (basé sur une discrétisation verticale en terme de classes de densité, ici Hallberg et Rhines 1996 [18]), à basse résolution, discute l'apparition d'un tourbillon cyclonique dans le coin nord-est comme preuve de réalisme pour le modèle en couche (Park et Bryan 2001 [30]), mais l'attribue aux différentes représentations de la convection dans les deux types de modèles. À la fin de la section suivante, on montre qu'un modèle à haute résolution, permettant le développement de tourbillons énergétiques (rectifiant les courants géostrophiques arrivant sur les bords), développe lui aussi un tourbillon cyclonique dans le coin nord-est et un déplacement des zones de convection vers l'ouest.

Une réserve néanmoins quant à l'utilisation des modèles à friction linéaire permettant une paramétrisation du transport tangentiel des couches limites le long des bords est leur incapacité à satisfaire une équation de vorticité inviscide dans l'intérieur de l'océan. En l'absence de sélection d'échelle dans le terme de viscosité, ce terme apparaît quasiment d'ordre un quand on dérive l'équation de vorticité, contrairement aux modèles à friction laplacienne ou biharmonique où il devient négligeable.

En conclusion, une paramétrisation adéquate des couches limites latérales, en réalité turbulentes, et qui ont une influence de premier ordre sur la circulation thermohaline, en grande partie non-géostrophique, permettrait de rendre plus réalistes les modèles océaniques à basse résolution. On peut néanmoins se demander quelle serait l'influence d'une topographie allant progressivement à 0 sur les bords, qui pourrait ajouter une contrainte sur la vorticité potentielle et rectifier les courants géostrophiques avant qu'ils arrivent à la côte... C'est ce que nous allons essayer de faire dans la section 4. Nous considérerons une paramétrisation de type Rayleigh et une profondeur de bassin variable s'annulant sur le bord.

### **Comparaison des modèles avec flux de chaleur prescrits**

Pour remédier au problème posé par le rappel des températures de surface,

pourtant traditionnel en océanographie, pour notre intercomparaison, on choisit cette fois-ci des flux de chaleur en surface indépendant de la température de surface, et sans structure zonale qui risquerait d'interagir avec la largeur de la couche limite de bord ouest, variant linéairement de  $45 \text{ W m}^{-2}$  à  $20^\circ \text{N}$  à  $-45 \text{ W m}^{-2}$  à  $60^\circ \text{N}$ .

Suivant les coefficients de diffusion choisis (surtout pour la température), les simulations n'aboutissent pas en général à une solution stationnaire, mais à des oscillations de période de 25 à 46 ans, souvent parfaitement régulières, dont le mécanisme est détaillé dans Colin de Verdière et Huck (1999) [10]. La comparaison de l'état moyen implique donc de longues moyennes temporelles, mais on peut également comparer la variabilité générée par les différents modèles (voir les résultats TAB. 3). En outre, on comparera ces expériences avec des simulations aux équations primitives à haute résolution (MOM), qui reproduisent une partie des tourbillons méso-échelles océaniques les plus énergétiques.

Thermodynamiquement, la température moyenne des eaux de fond varie de  $3.09^\circ \text{C}$  (PG0) à  $3.36^\circ \text{C}$  (PGR4) alors que les eaux de surface varient de  $12.6^\circ \text{C}$  (PG0W) à  $14.6^\circ \text{C}$  (PGR) – la moyenne des flux de chaleur à la surface étant nulle, la température moyenne du bassin est constante, contrairement au forçage précédent et égale à sa valeur initiale, soit  $4^\circ \text{C}$  ici. Dynamiquement, l'intensité moyenne de la cellule méridienne varie de 5.6 Sv (PG0W) à 10.9 Sv (PG0slip). Une constatation s'impose: les différences entre les paramétrisations sont moins importantes que pour la section précédente – l'influence du changement de forçage, implicite dans le rappel des températures de surface, n'était donc pas négligeable et renforçait les différences dues à la seule dynamique.

Néanmoins, les conséquences des diverses paramétrisations sur la variabilité interdécennale sont majeures, puisque deux modèles sur 13 ne produisent même pas d'oscillations, l'amplitude des oscillations sur n'importe quel diagnostic varie facilement du simple au quadruple, et les périodes d'oscillations varient de moins de 25 ans (PGR) à 46 ans (PGBslip).

La comparaison de ces expériences avec un modèle aux équations primitives à haute résolution (MOM, 20 km, viscosité et diffusivité horizontale biharmonique avec  $A_4=4 \times 10^{10} \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$  – voir Huck et al. 2001 [21]), permettant des tourbillons méso-échelles énergétiques, montre l'existence d'un tourbillon cyclonique dans le coin nord-est et un déplacement des régions de convection vers l'ouest (voir la discussion en fin de section précédente), et une dynamique du courant de bord ouest très différente (instabilités, dé-

Modèle	$T$ [yr]	$A$	KE [.1kg/(ms <sup>2</sup> )]	MOSF [Sv]	PHTa [PW]	$T_{SURF}$ [°C]	$T_{FOND}$ [°C]
MOM	26.0	n/a	0.261±0.045	7.89±0.80	0.254±0.023	13.638±0.096	3.188±0.0012
PGL	25.4	41.8	0.286±0.046	8.08±0.90	0.254±0.025	13.776±0.091	3.183±0.0012
PGLslip	37.2	105.0	0.294±0.066	8.37±1.92	0.261±0.044	13.213±0.211	3.243±0.0015
PGBslip	46.0	28.4	0.433±0.032	9.98±0.35	0.252±0.011	13.184±.071	3.325±0.0015
PG0	32.3	56.0	1.033±0.152	8.70±1.04	0.248±0.020	13.318±0.078	3.094±0.0011
PG0slip	45.7	29.6	0.587±0.047	10.86±1.2	0.291±0.062	13.167±0.074	3.321±0.0038
PG0W	37.8	74.4	0.638±0.143	5.56±1.04	0.256±0.047	12.603±0.208	3.296±0.0008
PGR	24.6	29.3	0.215±0.027	8.55±0.52	0.254±0.015	14.646±0.064	3.167±0.0011
PGRslip	44.3	85.2	0.180±0.029	8.65±1.61	0.254±0.026	14.097±0.157	3.264±0.002
PGRW	34.0	30.1	0.302±0.025	7.14±0.65	0.255±0.015	13.405±0.101	3.348±0.0003
PGR4	-	0.0	0.287	7.14	0.259	13.512	3.359
PGRS.03	35.0	n/a	0.292±0.025	7.01±0.65	0.253±0.016	13.325±0.105	3.331±0.0002
PGRS.3	-	0.0	0.276	6.78	0.254	13.462	3.356

TAB. 3 – Comparaison des modèles avec différentes paramétrisations de la viscosité et des couches limites latérales, pour un forçage en surface en flux de chaleur prescrits. La plupart des modèles produisent des oscillations de période  $T$  et d'amplitude  $A$  mesurée par la moyenne spatiale de l'écart-type de température dans le bassin (en  $10^{-3}$  K). Les valeurs moyennes et l'écart-type sont donnés pour l'énergie cinétique totale (KE), l'intensité de la cellule méridienne (MOSF), le maximum du transport de chaleur advectif vers le pôle (PHTa, en  $PW=10^{15}$  W), la température moyenne des couches de surface 0-50m ( $T_{SURF}$ ) et de fond 3950-4500m ( $T_{FOND}$ ).

crochements intermittents sous forme de jets zonaux...). L'état moyen de ce modèle différant largement des modèles à basse résolution (voir FIG. 2), il en est de même pour sa variabilité: déjà beaucoup moins régulière, la période des oscillations s'est progressivement allongée avec le raffinement du pas de grille et le spectre s'est enrichi de nouveaux pics fréquentiels.

Notons que le forçage en flux de chaleur constant et les paramétrisations sont identiques, sauf pour la dissipation horizontale de température et de quantité de mouvement (biharmonique  $A_4=4\times 10^{10}$  m<sup>4</sup> s<sup>-1</sup> pour MOM B20;  $\kappa_H=700$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup> et  $A_H=1.5\times 10^5$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup> pour PGL).

### Quelques relations suivant les paramétrisations

Dans cette partie, on donne quelques relations importantes pour les deux paramétrisations les plus standards, c'est-à-dire  $\epsilon_H v$  et  $A_H \Delta v + A_V \partial_z^2 v$ . Les systèmes correspondant sont respectivement équivalents aux systèmes de convection de Bénard dans un milieu poreux mince et anisotrope avec la loi de Darcy ou celle de Brinkman.

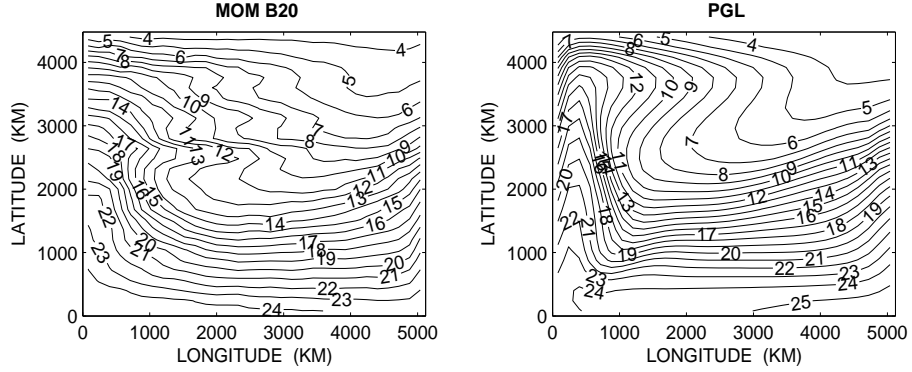


FIG. 2 – Comparaison des températures de surface moyennes pour le modèle aux équations primitives MOM à haute résolution (20 km) et le modèle planétaire-géostrophique PGL à basse résolution (160 km).

*La loi de Darcy en domaine mince*

Le domaine est donné par

$$\Omega_\delta = \{(x, y, z) : (x, y) \in S, -H(x, y) < z < 0\}$$

avec  $S$  la surface horizontale du domaine. Le système s'écrit

$$\begin{cases} \epsilon_H v + f v^\perp + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, & \frac{1}{\rho_0} \partial_Z p = (-1 + \alpha T) g, \\ \nabla \cdot v + \partial_Z w = 0, & (v, w) \cdot n_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_t T + v \cdot \nabla T + w \partial_Z T - K_h \Delta T - K_v \partial_Z^2 T = Q \end{cases} \quad (3.4)$$

dans  $\Omega$ . L'équation (3.4)<sub>1</sub> peut être vue comme la loi de Darcy en domaine mince anisotrope. On remarque que  $\nabla \cdot v + \partial_Z w = 0$  et  $w = 0$  en surface entraînent

$$w = \nabla \cdot \int_Z^0 v. \quad (3.5)$$

La condition au fond sur  $w$  donne alors

$$\nabla \cdot \int_{-H}^0 v = 0.$$



Le système (3.4) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_H v + f v^\perp + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \partial_Z p = (-1 + \alpha T)g, \\ \nabla \cdot \int_{-H}^0 v = 0, \quad v \cdot n = 0 \text{ sur les bords latéraux} \\ \partial_t T + v \cdot \nabla T + \nabla \cdot \left( \int_Z^0 v \right) \partial_Z T - K_h \Delta T - K_v \partial_Z^2 T = Q \end{array} \right. \quad (3.6)$$

avec  $w$  donnée par (3.5). Comme nous l'avons dit précédemment, c'est le modèle de Rayleigh : les équations planétaires géostrophiques avec trainée linéaire. C'est donc un système équivalent à la convection de Bénard gouvernée par la loi de Darcy dans un milieu poreux mince et anisotrope. Cette remarque est importante à faire car les phénomènes de stabilité en milieux poreux ont été largement étudiés. On peut alors s'inspirer de ces travaux pour voir l'influence de la force de Coriolis, cf [45].

Pour un domaine avec fond plat, on a montré dans [3] les relations

$$\epsilon_H \operatorname{rot} v + f \nabla \cdot v + \beta v_2 = 0 \quad (3.7)$$

et

$$(\epsilon_H^2 + f^2) \partial_Z^2 w = g \alpha \epsilon_H \Delta T + \beta \partial_Z v_1 + \beta f \partial_Z v_2. \quad (3.8)$$

Pour  $\epsilon_H = 0$ , on retrouve l'équation de Sverdrup standard. Ces relations sont intéressantes car elles permettent de voir la régularité de la vitesse verticale  $w$  en fonction de celle du traceur  $T$ .

*La loi de Brinkman en domaine mince*

Une alternative à la loi de Darcy est ce qui est communément appelé la loi de Brinkman. Ce système s'écrit en domaine mince

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon D_1 v + M_1 v + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \partial_Z p = (-1 + \alpha T)g, \quad \nabla \cdot v + \partial_Z w = 0, \\ \partial_t T + v \cdot \nabla T + w \partial_z T + Q_2 T = Q, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D_1 v = -A_h \Delta v - A_v \partial_Z^2 v, \quad Q_2 T = -K_h \Delta T - K_v \partial_Z^2 T.$$

On montre alors la relation suivante

$$-\epsilon A_h \Delta(\partial_z \nabla \cdot v) - \epsilon A_v \partial_z^2(\partial_z \nabla \cdot v) = f \partial_z \text{rot} v - \beta \partial_z v_1 - g \alpha \Delta T. \quad (3.10)$$

Cette relation permet de donner un résultat de régularité sur la vitesse verticale  $w$ .

Les résultats d'existence globale et d'unicité confirment le bien fondé des paramétrisations utilisées. Le but étant de montrer que pour une donnée initiale sur la température et des champs de vecteurs donnés aux bords, des solutions existent et sont si possible uniques. Le lecteur est renvoyé à [5], [36], [37] et [3] pour des résultats de ce type. Une régularité initiale fortement utilisée était  $T_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$  afin d'utiliser le principe du maximum comme dans [13]. Ces résultats constituent en fait une première étape si l'on veut étudier des problèmes de stabilité par exemple. Remarquons que dans [36] ou [3], seule la condition aux bords  $\bar{v} \cdot n = 0$  est satisfaite dans le cas de paramétrisation de type Rayleigh. En effet, on contrôle seulement *a priori*  $v$  et la divergence horizontale de l'intégrale verticale de  $v$ . Seule la trace  $\bar{v} \cdot n$  est alors *a priori* définie.

Notons également les travaux dans [5], où ils étudient l'existence globale de solutions fortes sous des hypothèses moins restrictives sur la température initiale pour la paramétrisation PGL. En effet, ils considèrent  $T_0 \in H^1(\Omega)$ , évitant ainsi l'utilisation directe du principe du maximum pour  $T$  et ce faisant ils résolvent l'un des trois problèmes posés dans [37]. Ils établissent également des résultats d'unicité de solutions faibles et d'existence d'attracteur global en dimension finie pour les deux autres problèmes ouverts restants. Pour cela ils utilisent fortement le fait que  $\Omega = \omega \times (0, h)$  avec  $h = Cte$  et les conditions aux bords suivantes pour la vitesse au fond ( $\Gamma_b$ ) et à la surface ( $\Gamma_s$ ):

$$\begin{cases} A_v \partial_z v = \tau, & w = 0 & \text{sur } \Gamma_b \\ \partial_z v = 0, & w = 0 & \text{sur } \Gamma_s \end{cases}$$

avec  $\tau$  un champ de vecteurs donné.

Pour l'unicité de solutions faibles, les auteurs montrent que la différence  $v$  de deux solutions  $v^1$  et  $v^2$  vérifie  $\bar{v} = \int_{-h}^0 v = \int_{-h}^0 (v^1 - v^2) = 0$  et ils en déduisent alors que  $v \in L^2(0, T; (H^2(\Omega))^2)$ . Pour cela ils écrivent l'équation satisfaite par  $\bar{v}$  en intégrant par rapport à  $z$ . Cette technique a été utilisée dans différentes analyses mathématiques en océanographie, voir par exemple [6] et [50]. Notons que dans [3], ils donnent un résultat d'existence et d'unicité

pour des conditions aux bords diverses mais dans un domaine de type bande  $\Omega = T^2 \times (0, 1)$  en utilisant la relation (3.10).

### Justification des équations planétaires géostrophiques

La justification des équations planétaires géostrophiques à partir des équations Primitives est un problème ouvert. Nous allons ici indiquer comment obtenir les équations planétaires géostrophiques classiques, en faisant tendre le nombre de Rossby  $\varepsilon$  vers 0, à partir des équations de Salmon 3D c'est-à-dire les équations planétaires géostrophiques avec traînée linéaire  $\varepsilon u_\varepsilon$ . Plus précisément, nous allons montrer la convergence du modèle suivant

$$\begin{cases} \varepsilon v_\varepsilon + f v_\varepsilon^\perp + \nabla_x p_\varepsilon = 0 \\ \varepsilon w_\varepsilon + \partial_z p_\varepsilon = -T_\varepsilon \\ \partial_t T_\varepsilon + (v_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot \nabla T_\varepsilon - \Delta T_\varepsilon = Q, \end{cases} \quad (3.11)$$

vers le modèle suivant

$$\begin{cases} f v^\perp + \nabla_x p = 0 \\ \partial_z p = -T \\ \partial_t T + (v, w) \cdot \nabla T - \Delta T = Q. \end{cases} \quad (3.12)$$

L'inégalité d'énergie classique ne donne pas d'estimation uniforme sur  $u_\varepsilon$  dans  $L^2$  (estimation qui semble nécessaire pour espérer passer à la limite dans le terme convectif de l'équation en température). Nous allons montrer comment par quelques manipulations algébriques, nous pouvons obtenir une telle estimation en utilisant des relations de paramétrisations semblables à celles données précédemment. On considère  $f$  une fonction périodique dépendant de  $y$ , de classe  $W^{1,\infty}$  telle qu'il existe  $C_0, C_1, C_2$  trois constantes strictement positives avec  $f \geq C_0$  et  $C_1 \leq |f'| \leq C_2$ . Le domaine est supposé du type bande  $\Omega = T^2 \times (0, 1)$ .

Tout d'abord on prend le rotationnel de la composante horizontale de l'équation des moments du système (3.11). On trouve

$$\varepsilon \operatorname{rot}_x v_\varepsilon + f \operatorname{div}_x v_\varepsilon + f' v_{2,\varepsilon} = 0. \quad (3.13)$$

On applique ensuite le laplacien horizontal à la composante verticale des moments du système (3.11), on obtient

$$\varepsilon \Delta_x w_\varepsilon + \partial_z \operatorname{div}_x \nabla_x p_\varepsilon + \Delta_x T_\varepsilon = 0. \quad (3.14)$$

En utilisant les composantes horizontales de l'équation des moments qui donne  $\nabla_x p_\varepsilon$ , on obtient, à partir de (3.14),

$$\varepsilon \Delta w_\varepsilon + f \partial_z \operatorname{rot}_x v_\varepsilon - f' \partial_z v_{1,\varepsilon} + \Delta_x T_\varepsilon = 0. \quad (3.15)$$

Maintenant on utilise la relation (3.13), on obtient

$$\varepsilon^2 \Delta w_\varepsilon + f^2 \partial_z^2 w_\varepsilon - f' f \partial_z v_{2,\varepsilon} - \varepsilon f' \partial_z v_{1,\varepsilon} + \varepsilon \Delta_x T_\varepsilon = 0. \quad (3.16)$$

On intègre maintenant les composantes horizontales de l'équation des moments par rapport à  $z$  et on utilise que  $\operatorname{div}_x \bar{v}_\varepsilon = 0$  où  $\bar{v}_\varepsilon = \int_0^1 v_\varepsilon$  pour déduire que

$$\bar{v}_\varepsilon = 0.$$

Ce qui donne, à une constante près, la pression

$$p_\varepsilon = \int_z^0 (T_\varepsilon + \varepsilon w_\varepsilon) - \int_0^1 \int_z^0 (T_\varepsilon + \varepsilon w_\varepsilon). \quad (3.17)$$

On multiplie maintenant la composante horizontale de l'équation des moments du système (3.11) par  $v_\varepsilon^\perp$  et on utilise les relations sur  $\bar{v}_\varepsilon$  et  $p_\varepsilon$ , on obtient

$$\int_\Omega f |v_\varepsilon|^2 = \int_\Omega \nabla_x \left( \int_z^0 T_\varepsilon \right) v_\varepsilon^\perp + \varepsilon \int_\Omega \operatorname{div}_x \left( \int_z^0 v_\varepsilon \right) \operatorname{rot}_x v_\varepsilon. \quad (3.18)$$

On différencie maintenant la composante horizontale de l'équation des moments par rapport à  $z$ . On obtient

$$\partial_z v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2 + f^2} A_\varepsilon (\nabla_x T_\varepsilon + \varepsilon \nabla_x w_\varepsilon) \quad (3.19)$$

où  $A_\varepsilon$  est une matrice  $2 \times 2$  telle que  $(A_\varepsilon)_{ii} = \varepsilon$ ,  $(A_\varepsilon)_{12} = f$  et  $(A_\varepsilon)_{21} = -f$ . On est maintenant prêt à obtenir une estimation uniforme de  $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$  dans  $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ .

On multiplie maintenant l'équation (3.16) par  $w_\varepsilon$  et on utilise que  $\Omega = T^2 \times (0, 1)$ , on obtient alors l'estimation suivante

$$\varepsilon \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)} + \|\partial_z w_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c \|\nabla_x T_\varepsilon\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \leq C \quad (3.20)$$

avec  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ . L'estimation pour  $\nabla_x T$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  provient de la troisième équation de (3.11) et des conditions aux bords et de la condition initiale pour  $T$

$$\begin{cases} \partial_z T = \gamma(T^* - T) \text{ sur } \Gamma_s \\ \partial_z T = 0 \text{ sur } \Gamma_b \\ T(0) = T_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.21)$$

La relation (3.18), combinée à (3.13) et (3.20), donne une estimation uniforme de  $v_\varepsilon$  dans  $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$ .

Ces bornes uniformes dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  sur  $w_\varepsilon$  et  $v_\varepsilon$  permettent alors le passage à la limite de (3.11) vers (3.12). D'où le

**Théorème 3.1:** *Soit  $T_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $T^* \in L^2(\Gamma_s)$ ,  $Q \in L^2(\Omega)$ . Alors il existe une sous-suite de  $(v_\varepsilon, w_\varepsilon, p_\varepsilon, T_\varepsilon)$  solutions du système (3.11), à  $\varepsilon$  fixé, qui converge vers  $(v, w, p, T)$  la solution du système (3.12) quand  $\varepsilon$  tend vers 0 au sens suivant*

$$(v_\varepsilon, w_\varepsilon) \rightharpoonup (v, w) \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ faible,}$$

$$T_\varepsilon \rightarrow T \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ fort .}$$

PREUVE: Des estimations uniformes de  $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , on déduit l'existence d'un couple  $(v, w)$  tel que, pour une sous-suite,

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2) \text{ faible et } w_\varepsilon \rightharpoonup w \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible .}$$

On peut alors obtenir une estimation de  $\partial_t T_\varepsilon$  comme dans [36] et montrer qu'il existe  $T$  tel que, pour une sous-suite,  $T_\varepsilon$  converge fortement vers  $T$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . On peut alors passer à la limite dans la formulation variationnelle en température en faisant porter le terme de dérivée spatiale de la convection sur la fonction test.

Le passage à la limite dans la forme faible en vitesse de (3.11) ne nécessiterait lui que la borne uniforme de  $v_\varepsilon$  dans  $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$  et la borne uniforme de  $\sqrt{\varepsilon}u_\varepsilon$  dans  $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ . On obtient alors que  $(v, w)$  satisfait

$$\int_{\Omega} f v^\perp \phi_x = 0 \quad \int_{\Omega} T \phi_z = 0$$

avec  $\phi = (\phi_x, \phi_z)$  une fonction test. Par le théorème de De Rham, on obtient alors l'existence d'une pression telle que  $(v, w, p)$  satisfait (3.12)<sub>1,2</sub>.

□

## 4 Le cas avec profondeur s'annulant sur le bord

Nous allons dans cette partie revenir sur le travail réalisé par R. Salmon dans [34]. Ce papier concerne les équations planétaires géostrophiques

$$\begin{cases} f v^\perp + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = -\epsilon_H v \\ \frac{1}{\rho_0} \partial_z p = (-1 + \alpha T) g \\ \nabla \cdot v + \partial_z w = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

avec comme équation en température l'équation linéaire suivante

$$w N^2 = -kT,$$

où  $N$  représente la flottabilité ( dans la littérature on l'appelle improprement la *fréquence de Brunt-Väisälä* et dans ce cas elle correspond à une fréquence multipliée par  $2\pi$ ). Elle se rapporte au mouvement d'oscillation à la verticale qui animerait une parcelle d'eau si on l'écartait de sa position d'équilibre.  $k$  désigne le coefficient d'amortissement.

La théorie est normalement appliquée à des bassins océaniques avec contours et profondeur idéalisés du genre des carrés avec un parallélépipède à fond constant. Dans [34], il exprime le champ de vitesse en fonction de la pression et obtient alors une équation sur la pression grâce à l'incompressibilité. Il essaie alors de comprendre les limitations et résultats inhérents à un domaine avec une profondeur variable s'annulant sur le bord.

Dans cette partie, nous regardons ce qui se passe dans le cas où l'on considère également (4.23) mais avec une equation non linéaire sur la température du type

$$\partial_t T + v \cdot \nabla T + \nabla \cdot \left( \int_Z^0 v \right) \partial_z T - K_h \Delta T - K_v \partial_z^2 T = Q.$$

On exprime les vitesses en fonction du traceur et d'une fonction courant définie sur la surface. L'équation en fonction courant est alors à poids et

prend en compte le fond. Le champ de vitesse horizontale est donné par

$$v = -\frac{1}{\epsilon_H^2 + f^2} \begin{pmatrix} \epsilon_H & f \\ -f & \epsilon_H \end{pmatrix} \left[ \nabla p_s + g\alpha \nabla \int_0^z T \right] \quad (4.23)$$

où  $p_s$  désigne une pression définie en surface. Si l'on trouve le gradient horizontal de cette pression superficielle  $\nabla p_s$  alors on aura le champ de vitesse  $v$ . Or on sait que  $\nabla \cdot \bar{v} = 0$  où  $\bar{v}$  désigne l'intégrale suivant la verticale. Si la surface est simplement connexe, c'est-à-dire qu'elle ne possède pas d'îles, alors il existe une fonction courant  $\Psi$  telle que

$$\bar{v} = \nabla^\perp \Psi. \quad (4.24)$$

En intégrant verticalement l'expression de  $v$ , on obtient

$$\bar{v} = -\frac{1}{\epsilon_H^2 + f^2} \begin{pmatrix} \epsilon_H & f \\ -f & \epsilon_H \end{pmatrix} \left[ H \nabla p_s + g\alpha \int_{-H}^0 \nabla \int_0^z T \right]. \quad (4.25)$$

On obtient donc une relation entre  $\Psi$  et  $p_s$  grâce à (4.24) et (4.25). Donc si l'on est capable de calculer  $\Psi$ , on calculera  $\nabla p_s$  et donc on aura  $v$  en fonction de  $T$  grâce à (4.23). Nous allons donc maintenant donner l'équation satisfaite par  $\Psi$ . On utilise pour cela que le rotationnel d'un gradient est nul. On exprime le gradient de pression superficielle. Son rotationnel étant nul, on obtient alors que  $\Psi$  est solution du système suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( \frac{\widetilde{M} \nabla \Psi}{H} \right) = g\alpha \nabla^\perp \cdot \left( \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla \left( \int_Z^0 T \right) \right) \text{ dans } \Gamma_S, \\ \Psi = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_S \end{cases} \quad (4.26)$$

avec  $\nabla^\perp = (-\partial_y, \partial_x)$ ,  $H$  la fonction continue qui s'annule au bord,

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \epsilon_H & -f \\ f & \epsilon_H \end{pmatrix}.$$

La condition  $\Psi = 0$  provient du fait que  $\bar{v} \cdot n = 0$  sur le rivage  $\Gamma_S$ . En effet  $\bar{v} = \nabla^\perp \Psi$  et donc on a  $\nabla \Psi \cdot \tau = 0$  sur  $\Gamma_S$  où  $\tau$  désigne le vecteur tangent. Donc  $\Psi$  est constant sur le bord car la surface est simplement connexe. On choisit  $\Psi = 0$  car  $\Psi$  n'intervient que par son gradient dans l'expression de  $v$ . Numériquement, ce système est intéressant car il permet notamment de retrouver un champ de vitesse incompressible tri-dimensionnel directement par

un calcul bi-dimensionnel sur la surface pour la fonction courant. Il permet de satisfaire les conditions aux bords d'imperméabilité sans problème apparent. Notons que l'absence de parois verticales est importante pour satisfaire la condition au fond et en surface  $u \cdot n = 0$  où  $u = (v, w)$  et la condition d'absence de flux  $\bar{v} \cdot n_{\partial s} = 0$  sur le rivage. En présence de bords latéraux, on obtiendrait seulement  $\bar{v} \cdot n_{\partial s} = 0$  et non  $u \cdot n = 0$  sur les bords latéraux.

## 5 Application à l'analyse de stabilité linéaire de la circulation océanique

### Équilibres multiples et oscillations thermohalines

Étant donné son rôle climatique important, surtout pour la douceur des hivers européens, la stabilité de la circulation thermohaline est un sujet de grand intérêt. On sait par exemple que par le passé, des décharges importantes d'eau douce dans le nord de l'Atlantique, provenant des fontes massives de glaciers, ont momentanément interrompu la formation d'eau profonde telle qu'elle a lieu actuellement. Dans le cadre du réchauffement climatique actuel, l'augmentation prévisible des précipitations aux moyennes latitudes risque de réduire la salinité des eaux de surface et donc leur capacité à former des eaux profondes par refroidissement (actuellement, il n'y a pas de formation d'eau profonde dans le nord du Pacifique par exemple).

Les modèles idéalisés de la circulation océanique, forcés ou couplés à des atmosphères simplifiées, vu leur rapidité d'exécution, sont des outils numériques parfaitement adaptés à des études conceptuelles sur ce sujet, car ils permettent de réaliser un grand nombre de scénarios et de contrôler parfaitement les processus physiques mis en jeu. Il est néanmoins nécessaire de vérifier les résultats obtenus dans des modèles plus réalistes, globaux, incluant la bathymétrie des bassins océaniques et des forçages ou couplages réalistes.

Plusieurs types d'études ont ainsi été menées à l'aide de modèles océaniques idéalisés, par exemple l'analyse des équilibres multiples de la circulation océanique qui résultent de paramétrisations du mélange vertical en fonction du gradient de densité (Edwards et Shepherd 2001 [12]) ou de la différence de forçage pour la température (rappel) et la salinité (flux d'eau douce) de surface (Stommel 1961 [41] à l'origine, nombreuses références depuis, par exemple la thèse de Marotzke 1990 [26], ou Marotzke et Willebrand



1991 [27]).

Une approche formelle pour un modèle bidimensionnel (latitude – profondeur) de la circulation océanique en moyenne zonale a ainsi permis de mettre en évidence les modes instables responsables des équilibres multiples de la cellule thermohaline pour des bassins bihémisphériques et les modes oscillants donnant des périodes centenaires (Schmidt et Mysak 1996 [40]), mais cette méthode nécessite une linéarisation de la formulation pour l’ajustement convectif.

### **Approche empirique en dynamique planétaire-géostrophique**

Plus récemment, les modèles tridimensionnels PG ont été utilisés pour étudier les oscillations interdécennales obtenues dans la section précédente (Huck et Vallis 2001 [22]). En effet, la dynamique diagnostique permet de réduire le nombre de variables d’état (prognostiques) par rapport aux modèles PE : si on ne s’intéresse qu’à la densité (ou son équivalent en température), c’est la seule variable d’état en PG alors qu’il y en a trois en PE (densité et vitesses horizontales) – sachant qu’on cherche les valeurs propres de matrices de dimension (nombre de variable d’état)<sup>2</sup>, ce rapport 3 a une influence cruciale sur la faisabilité de l’analyse, tant du point de vue du stockage en mémoire que du temps de calcul...

Une approche préliminaire pragmatique a été suivie pour étudier la faisabilité de la méthode : une linéarisation empirique des équations est faite numériquement autour d’un état d’équilibre pour construire la matrice linéaire tangente, en perturbant successivement la température (ou densité) en chaque point de grille, et en intégrant numériquement le modèle pendant un temps “court” (1 à 7 jours). Afin de conserver le caractère centré de la linéarisation, il est apparu fondamental de perturber successivement par une anomalie de température positive et négative (à cause de la dissymétrie de l’ajustement convectif : une anomalie dense se mélange verticalement vers le bas, alors qu’une anomalie chaude se mélange vers le haut). On cherche alors les valeurs et vecteurs propres de cette matrice ayant les taux de croissance les plus importants.

On a ainsi pu montrer que les oscillations interdécennales “thermiques” résultent d’un mode linéaire instable, avec un taux de croissance relativement faible, de l’ordre de quelques cycles par an, une période et une structure spatio-temporelle quasiment identiques aux oscillations non-linéaires. En comparant aux valeurs propres pour un forçage en rappel des températures de surface, il apparaît que la relaxation des températures de surface a un rôle

fortement amortisseur de la variabilité océanique. Ce rôle n'est pas physiquement justifié puisque la capacité calorifique de l'océan excède largement celle de l'atmosphère : si la circulation océanique transporte plus de chaleur vers les pôles, l'atmosphère se réchauffe, ce qui réduit les déperditions calorifiques de l'océan ! Il est donc fortement conseillé de mener ce genre d'analyse de stabilité avec des modèles couplés...

### Développements dans les modèles aux équations primitives

En parallèle, des méthodes de continuation numérique et d'analyse de stabilité linéaire ont été développées pour les équations primitives dans des modèles implicites (Dijkstra et al. 2001 [11]), et donnent des résultats très similaires pour la variabilité interdécennale (de Raa et Dijkstra 2002 [44]). Néanmoins, de nombreuses contraintes sont actuellement pénalisantes pour le réalisme des simulations, qui sont limitées à des basses résolutions et à des coefficients de viscosité importants ( $1.6 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) pour permettre de déterminer numériquement les solutions stationnaires.

Une approche encore plus réaliste basée sur l'analyse de stabilité généralisée (Farrell et Ioannou 1996 [14, 15]) a été mise au point dans le modèle aux équations primitives OPA (Madec et al. 1998 [25]) dans une configuration du Pacifique tropical pour étudier le phénomène El Niño (Moore et al. 2001 [28]). Cette méthode nécessite l'adjoint du modèle océanique, et prend en compte le couplage avec différents modèles atmosphériques simplifiés, essentiel pour le développement des perturbations. Cette approche très prometteuse devrait être adaptée prochainement à une configuration de l'océan global...

## 6 Conclusion

La dynamique planétaire-géostrophique dérive des équations primitives pour des échelles de temps supérieures à quelques jours et des échelles spatiales bien supérieures au rayon de déformation du premier mode barocline (typiquement 100 km dans l'océan) : elle est donc parfaitement adaptée à l'étude de la circulation océanique de grande échelle aux moyennes latitudes. Le passage de l'équateur reste problématique même si la zone où la force de Coriolis est négligeable reste très limitée, voire inférieure à la résolution du modèle, car le transport des courants (jets) équatoriaux très intenses (quelques m/s parfois) ne pourra être pris en compte. En l'absence de force de Coriolis à l'ordre 1 dans les équations du mouvement, seuls les termes non-linéaires négligés dans la dynamique PG peuvent équilibrer le gradient

de pression. Il est peu probable que l'on puisse s'affranchir de résoudre explicitement ces courants équatoriaux, dans une dynamique PE, pour déterminer avec précision les échanges inter-bassins...

L'implémentation numérique de ces équations pour un bassin océanique fermé nécessite la paramétrisation de la diffusion turbulente de quantité de mouvement et des couches limites latérales : celles-ci ont une influence d'ordre un sur la solution dans un bassin idéalisé à fond plat. Il n'existe pourtant pas actuellement de paramétrisation satisfaisante, basée sur le caractère non-linéaire et inertiel de ces couches limites. Il serait intéressant d'essayer de faire une analyse mathématique des couches limites afin de proposer une paramétrisation exploitable ne présentant pas les inconvénients des autres paramétrisations jusqu'alors utilisées. La justification mathématique du modèle planétaire-géostrophique classique à partir des équations Primitives est encore ouverte.

La réduction du nombre de variables prognostiques par rapport aux équations primitives, et la dynamique diagnostique, permettent de résoudre beaucoup plus facilement certains problèmes, analytiques ou numériques, comme par exemple des analyses de stabilité linéaire de la circulation océanique. La plupart des développements actuels se font sur des modèles couplés, l'océan et l'atmosphère étant indissociables pour tous les problèmes de prévisibilité climatique.

## Références

- [1] A. Arakawa. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motions: two dimensional incompressible flow. part 1. *J. Comput. Phys.*, 1: 119–143, 1966.
- [2] J. Boussinesq. *Théorie analytique de la chaleur, Vol. 2*. Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [3] D. Bresch and M. Sy. Convection in rotating porous media: The planetary geostrophic equations, used in geophysical fluid dynamics, revisited. *Cont. Mech. Thermodyn.*, To appear 2003.
- [4] A.P. Burger. Scale considerations of planetary motions of the atmosphere. *Tellus*, 10: 195–205, 1958.

- [5] C. Cao and E.S. Titi. Global well posedness and finite dimensional global attractor for a 3-d planetary geostrophic viscous model. *Comm. Pure Appl. Math.*, page , To appear 2003.
- [6] T. Colin and P. Fabrie. Rotating fluid at high rossby number driven by a surface stress: existence and convergence. *Adv. Differential Equations*, 2: 715–751, 1997.
- [7] A. Colin de Verdière. Buoyancy driven planetary flows. *J. Mar. Res.*, 46: 215–265, 1988.
- [8] A. Colin de Verdière. On the interaction of wind and buoyancy driven gyres. *J. Mar. Res.*, 47: 595–633, 1989.
- [9] A. Colin de Verdière. On the oceanic thermohaline circulation. in modelling oceanic climate interactions. *J. Willebrand and D. L. T. Anderson Eds.*, Springer-Verlag: 151–183, 1993.
- [10] A. Colin de Verdière and T. Huck. Baroclinic instability: an oceanic wavemaker for interdecadal variability. *J. Phys. Oceanogr.*, 29: 893–910, 1999.
- [11] H. A. Dijkstra, H. Oksuzoglu, F. W. Wubs, and E. F. F. Bott. A fully implicit model of the three-dimensional thermohaline ocean circulation. *J. Comput. Phys.*, 173: 1–31, 2001.
- [12] N. R. Edwards and J. G. Shepherd. Multiple thermohaline states due to variable diffusivity in a hierarchy of simple models. *Ocean Modelling*, 3: 67–94, 2001.
- [13] P. Fabrie. Solutions fortes et comportement asymptotique pour un modèle de convection naturelle en milieux poreux. *Acta Applicandae Mathematicae*, 7: 45–77, 1986.
- [14] B. F. Farrell and P. J. Ioannou. Generalized stability theory. part i: Autonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, 53: 2025–2040, 1996.
- [15] B. F. Farrell and P. J. Ioannou. Generalized stability theory. part ii: Nonautonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, 53: 2041–2053, 1996.
- [16] P.R. Gent and J. C. McWilliams. Isopycnal mixing in ocean circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, 20: 150–155, 1990.

- [17] S.M. Griffies and al. Developments in ocean climate modelling. *Ocean Modelling*, 2: 123–192, 2000.
- [18] R. Hallberg and P. Rhines. Buoyancy-driven circulation in an ocean-basin with isopycnals intersecting the sloping boundary. *J. Phys. Oceanogr.*, 26: 913–940, 1996.
- [19] R. Haney. Surface thermal boundary condition for ocean circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, 1: 241–248, 1971.
- [20] T. Huck. *Modélisation de la circulation thermohaline: Analyse de sa variabilité interdécennale*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, 1997.
- [21] T. Huck, G. K. Vallis, and A. Colin de Verdière. On the robustness of the interdecadal modes of the thermohaline circulation. *J. Climate*, 14: 940–963, 2001.
- [22] T. Huck and G.K. Vallis. Linear stability analysis of the three-dimensional thermally-driven ocean circulation: application to interdecadal oscillations. *Tellus*, 53A: 526–545, 1999.
- [23] T. Huck, A.J. Weaver, and A. Colin de Verdière. On the influence of the parameterization of lateral boundary layers on the thermohaline circulation in coarse-resolution ocean models. *J. Mar. Res.*, 57: 387–426, 1999.
- [24] P. Killworth. A two-level wind and buoyancy driven thermocline model. *J. Phys. Oceanogr.*, 15: 1414–1432, 1985.
- [25] G. Madec, P. Delecluse, M. Imbard, and C. Lévy. Opa 8.1 ocean general circulation model reference manual. *Note du Pôle de modélisation, Institut Pierre-Simon Laplace*, 11:1–91, 1998.
- [26] J. Marotzke. *Instabilities and multiple equilibria of the thermohaline circulation*. Ph.D. thesis dissertation, Institut für Meereskunde, Kiel, 126pp, 1990.
- [27] J. Marotzke and J. Willebrand. Multiple equilibria of the global thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, 21: 1372–1385, 1991.

- [28] A. M. Moore, J. Vialard, A. T. Weaver, D. L. T. Anderson, R. Kleeman, and J. R. Johnson. The role of air-sea interaction in controlling the optimal perturbations of low-frequency tropical coupled ocean-atmosphere modes. *ECMWF Technical memorandum, Reading, UK*, 351: 35pp, 2001.
- [29] R. Pacanowski, K. Dixon, and A. Rosati. *The GFDL Modular Ocean Model*. Users Guide Version 1.0., GFDL Ocean Group Technical Report #2, 1991.
- [30] Y.G. Park and K. Bryan. Comparison of thermally driven circulations from a depth-coordinate model and an isopycnal-layer model. part ii: The difference and structure of the circulations. *J. Phys. Oceanogr.*, 31: 2612–2624, 2001.
- [31] N.A. Philipps. Geostrophic motion. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1: 123–176, 1963.
- [32] M. Redi. Oceanic isopycnal mixing by coordinate rotation. *J. Phys. Oceanogr.*, 12: 1154–1158, 1982.
- [33] A. Robinson and H. Stommel. The oceanic thermocline and the associated thermohaline circulation. *Tellus*, XI: 295–308, 1959.
- [34] R. Salmon. A simplified linear ocean circulation theory. *J. Mar. Res.*, 44:695–711, 1986.
- [35] R. Salmon. Linear ocean circulation theory with realistic bathymetry. *J. Mar. Res.*, 56: 833–884, 1998.
- [36] R.M. Samelson, R. Temam, and S. Wang. Some mathematical properties of the planetary geostrophic equations for large scale ocean circulation. *Appl. Anal.*, 70: 147–173, 1998.
- [37] R.M. Samelson, R. Temam, and S. Wang. Remarks on the planetary geostrophic model of gyre scale ocean circulation. *Diff. Int. Eqs.*, 13: 1–14, 2000.
- [38] R.M. Samelson and G.K. Vallis. Large-scale circulation with small diapycnal diffusion: The two-thermocline limit. *J. Mar. Res.*, 55: 223–275, 1997.

- [39] R.M. Samelson and G.K. Vallis. A simple friction and diffusion scheme for planetary geostrophic basin models. *J. Phys. Oceanogr.*, 27: 186–194, 1997.
- [40] G. A. Schmidt and L. A. Mysak. The stability of a zonally averaged thermohaline circulation model. *Tellus*, 48: 158–178, 1996.
- [41] H. Stommel. Thermohaline convection with two stable regimes of flow. *Tellus*, XIII: 224–230, 1961.
- [42] H. Stommel and A.B. Arons. On the abyssal circulation of the world ocean. i: Stationary planetary flow patterns on a sphere. *Deep Sea Res.*, 6: 140–154, 1960.
- [43] H. Stommel and A.B. Arons. On the abyssal circulation of the world ocean. ii: An idealized model of the circulation pattern and amplitude in oceanic basins. *Deep Sea Res.*, 6: 217–233, 1960.
- [44] L. A. te Raa and H. A. Dijkstra. Instability of the thermohaline ocean circulation on interdecadal time scales. *J. Phys. Oceanogr.*, 32: 138–160, 2002.
- [45] P. Vadasz. Coriolis effect on gravity-driven convection in a rotating porous layer heated from below. *J. Fluid Mech*, 1376: 351–375, 1998.
- [46] P. Welander. An advective model of the ocean thermocline. *Tellus*, XI: 309–318, 1959.
- [47] M. Winton. *Numerical investigations of steady and oscillating thermohaline circulation*. Ph.D. thesis, University of Washington, 1993.
- [48] M. Winton and E.S. Sarachik. Thermohaline oscillations induced by strong steady salinity forcing of ocean general circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, 23: 1389–1410, 1993.
- [49] S. Zhang, C. A. Lin, and R. J. Greatbatch. A thermocline model for ocean-climate studies. *J. Mar. Res.*, 50: 99–124, 1992.
- [50] M. Ziane. Regularity results for the stationary primitive equations of the atmosphere and the ocean. *Nonlinear Anal*, 28: 289–313, 1997.

D. BRESCH, T. HUCK, M. SY

DIDIER BRESCH  
UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL  
LABO. DE MATHS APPL., UMR6620  
24 AVENUE DES LANDAIS  
63177 AUBIÈRE CEDEX  
FRANCE  
bresch@math.univ-bpclermont.fr

THIERRY HUCK  
LABO. DE PHYSIQUE DES OCÉANS  
UNIV. DE BRETAGNE OCCIDENTALE  
UFR SCIENCES  
6 AVENUE LE GORGEU, B. P. 809  
29285 BREST CEDEX  
FRANCE  
thuck@univ-brest.fr

MAMADOU SY  
UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL  
LABORATOIRE DE MATHS APPL., UMR6620  
24 AVENUE DES LANDAIS  
63177 AUBIÈRE CEDEX  
FRANCE  
Mamadou.Sy@math.univ-bpclermont.fr